# Αναλυτική Μέθοδος Προσδιορισμού του Μέγιστου Φορτίου Τροχού επί της Σιδηροδρομικής Γραμμής

**ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΔΕΜΙΡΙΔΗΣ**
Δρ Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ
Συγκοινωνιολόγος ΕΝΡΟ

**ΧΡΙΣΤΟΣ ΠΥΡΓΙΔΗΣ**
Αναπληρωτής Καθηγητής ΑΠΘ

*Περίληψη*
*Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται μια μέθοδος προσδιορισμού του μέγιστου ασκούμενου φορτίου τροχού επί σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση (έρμα), μέσω πλήρους αναλυτικού υπολογισμού της συνεισφοράς σε αυτό των μη-αναρτημένων μαζών του τροχαίου υλικού. Στο πλαίσιο αυτό, εφαρμόζονται μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την αλληλεπίδραση τροχαίου υλικού και σιδηροδρομικής γραμμής στις μεσαίες και υψηλές συχνότητες, τα οποία λαμβάνουν υπόψη τα ακριβή γεωμετρικά, δυναμικά και κατασκευαστικά χαρακτηριστικά της σιδηροδρομικής γραμμής, καθώς και τα χαρακτηριστικά της επαφής τροχού-σιδηροτροχιάς. Η προτεινόμενη μέθοδος δύναται να χρησιμοποιηθεί ως έχει στη διαδικασία μελέτης και σχεδιασμού των σιδηροτροχιών και με κατάλληλες τροποποιήσεις στον σχεδιασμό άλλων στοιχείων της γραμμής.*

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αντικείμενο της θεωρητικής αυτής εργασίας είναι ο υπολογισμός του μέγιστου φορτίου τροχού επί σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση. Με τον όρο μέγιστο φορτίο τροχού νοείται η χαρακτηριστική τιμή του κατακόρυφου φορτίου τροχού που ασκείται επί της σιδηροδρομικής γραμμής, η οποία καλύπτει τη μέγιστη δυνατή, θεωρητικά, πιθανότητα υπέρβασής του κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής της σιδηροδρομικής γραμμής. Η εν λόγω πιθανότητα επιτρέπει να ληφθούν υπόψη εξαιρετικές περιπτώσεις φόρτισης της σιδηροδρομικής γραμμής, μη-συνηθισμένες σε συχνότητα εμφάνισης, όπως για παράδειγμα αγκύρια ξεχασμένα στην επιφάνεια κύλισης των σιδηροτροχιών, θραύση των σιδηροτροχιών, χάσματα στην επιφάνεια κύλισης των σιδηροτροχιών από αποκόλληση τμήματος της κεφαλής τους, επιπλατύνσεις των επισώτρων των τροχών που ξεπερνούν τις παραδεκτές ανοχές, κτλ. [1]. Δεδομένου του τυχηματικού χαρακτήρα του μηχανισμού φόρτισης της σιδηροδρομικής γραμμής [2], η πιθανότητα ακραίων, μη-συνηθισμένων σε συχνότητα εμφάνισης, μέγιστων τιμών φορτίου τροχού αντιστοιχεί εν γένει σε τιμές της τάξης του $10^{-6}$ (ήτοι μια στο 1000000) [3]. Η πιθανότητα αυτή ταυτίζεται, στην περίπτωση κανονικής κατανομής, με το επίπεδο ασφάλειας που αντιστοιχεί στο πενταπλάσιο της τυπικής απόκλισης της τυχαίας μεταβλητής (ήτοι του κατακόρυφου φορτίου τροχού επί της σιδηροδρομικής γραμμής) από τη μέση τιμή του.

*Υποβλήθηκε: 18.3.2006 Έγινε δεκτή: 1.7.2008*

Το μέγιστο φορτίο τροχού βρίσκει εφαρμογή στον σχεδιασμό των σιδηροτροχιών [3], η προτεινόμενη ωστόσο στην παρούσα εργασία μεθοδολογία υπολογισμού του συνολικού (στατικού, ημι-στατικού και δυναμικού) κατακόρυφου φορτίου τροχού θα μπορούσε να εφαρμοστεί και για τον υπολογισμό των φορτίων σχεδιασμού των λοιπών στοιχείων και στρώσεων της σιδηροδρομικής γραμμής (π.χ. των στρωτήρων, του έρματος, κτλ.). Στην περίπτωση αυτή οφείλει να ληφθεί υπόψη για κάθε τέτοιο στοιχείο ή στρώση της σιδηροδρομικής γραμμής το ανάλογο επίπεδο στατιστικής πιθανότητας ασφάλειας. Το επίπεδο αυτό ασφάλειας φθίνει από τις ανώτερες στις κατώτερες στρώσεις, δεδομένης της μείωσης των ασκούμενων τάσεων από τις σιδηροτροχιές στη στρώση θεμελίωσης [4] (π.χ. ενώ για τις σιδηροτροχιές το σύνηθες επίπεδο ασφάλειας αντιστοιχεί στο πενταπλάσιο της τυπικής απόκλισης του κατακόρυφου φορτίου τροχού από τη μέση τιμή του [3], για τους στρωτήρες και το έρμα αντιστοιχεί στο τριπλάσιο και διπλάσιο αυτής αντίστοιχα [1]).

Στην παρούσα εργασία προτείνεται μια θεωρητική μέθοδος υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού, η οποία στηρίζεται στον πλήρως αναλυτικό υπολογισμό της συνεισφοράς στο κατακόρυφο φορτίο τροχού των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινιστεί ότι στις βιβλιογραφικές αναφορές [1,5,6,7] έχει αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της συνεισφοράς των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος στο συνολικό φορτίο σχεδιασμού της γραμμής (εφαρμογή στο επίπεδο των στρωτήρων) με ημι-αναλυτική μέθοδο υπολογισμού.

Η εργασία περιλαμβάνει τέσσερα μέρη. Στο πρώτο μέρος περιγράφεται ο μηχανισμός κατακόρυφης φόρτισης της σιδηροδρομικής γραμμής και παρουσιάζονται οι υφιστάμενες μέθοδοι υπολογισμού του κατακόρυφου φορτίου τροχού και του μέγιστου φορτίου τροχού. Στο δεύτερο μέρος αναπτύσσεται η νέα μέθοδος. Στο τρίτο μέρος παρουσιάζεται αριθμητική εφαρμογή υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού επί σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση.

Στο τελευταίο, τέταρτο μέρος της εργασίας, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν.

Η εργασία συμβάλλει στην πρόταση μιας νέας θεωρητικής μεθόδου υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού επί σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση, η οποία δύναται να χρησιμοποιηθεί ως έχει στη διαδικασία μελέτης και σχεδιασμού των σιδηροτροχιών και με κατάλληλες τροποποιήσεις στον σχεδιασμό άλλων στοιχείων της γραμμής.

## 2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

| | |
|---|---|
| $A$ | Παράμετρος που χαρακτηρίζει την ποιότητα της επιφάνειας κύλισης των σιδηροτροχιών ως προς την τραχύτητά της |
| $A_r$ | Εμβαδόν διατομής σιδηροτροχιάς ($m^2$) |
| $c_t$ | Απόσβεση γραμμής (N/m/s) |
| $c_b$ | Απόσβεση έρματος (N/m/s) |
| $c_p$ | Απόσβεση υποθεμάτων σιδηροτροχιών (N/m/s) |
| $d_r$ | Πυκνότητα χάλυβα σιδηροτροχιών ($kg/m^3$) |
| $E_r$ | Μέτρο ελαστικότητας χάλυβα σιδηροτροχιών ($N/m^2$) |
| $f$ | Συχνότητα (Hz) |
| $f_t$ | Ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης σιδηροδρομικής γραμμής (Hz) |
| $F_{nc}$ | Μη-εξισορροπούμενη φυγόκεντρος Δύναμη (N) |
| $g$ | Επιτάχυνση της βαρύτητας ($9{,}81 m/s^2$) |
| $h_{KB}$ | Απόσταση του κ.β. του οχήματος από την επιφάνεια κύλισης των σιδηροτροχιών (m) |
| $H_{yC}$ | Μετατοπισημότητα επαφής (m/N) |
| $H_{yH}$ | Μετατοπισημότητα ελατηρίου του Hertz (m/N) |
| $H_{yr}$ | Μετατοπισημότητα γραμμής (m/N) |
| $H_{yW}$ | Μετατοπισημότητα τροχού (m/N) |
| $I_r$ | Ροπή αδράνειας σιδηροτροχιάς ($m^4$) |
| $\kappa_r$ | Συντελεστής διάτμησης χάλυβα σιδηροτροχιών |
| $k_l$ | Παράμετρος που χαρακτηρίζει την ποιότητα της επιφάνειας κύλισης των σιδηροτροχιών ως προς την τραχύτητά της |
| $k_H$ | Ακαμψία του ελατηρίου του Hertz (N/m) |
| $k_t$ | Δυναμικός συντελεστής ελαστικότητας γραμμής (N/m) |
| $k_b$ | Δυναμικός συντελεστής ελαστικότητας έρματος (N/m) |
| $k_p$ | Δυναμικός συντελεστής ελαστικότητας υποθεμάτων σιδηροτροχιών (N/m) |
| $\lambda$ | Μήκος κύματος (m) |
| $l_s$ | Απόσταση μεταξύ διαδοχικών συνδέσμων (m) |
| $m_W$ | Μη-αναρτημένη μάζα τροχού (kg) |
| $M_s$ | Μάζα στρωτήρα (kg) |
| $n$ | Συντελεστής πιθανοτικής προσαύξησης της μέσης τετραγωνικής τιμής των τυπικών αποκλίσεων των δυναμικών επιφορτίσεων του οχήματος |
| $\nu_r$ | Λόγος Poisson χάλυβα σιδηροτροχιών |
| $N_L$ | Μέση τυπική απόκλιση του κατά μήκος υψομετρικού σφάλματος γραμμής (mm) |
| $Q$ | Φορτίο κατ' άξονα (N) |
| $Q_{max}$ | Μέγιστο φορτίο τροχού (N) |
| $Q_{dyn}$ | Δυναμικό φορτίο τροχού (N) |
| $Q_{dyn,um}$ | Δυναμικές επιφορτίσεις των μη-αναρτημένων μαζών (N) |
| $Q_{dyn,ssm}$ | Δυναμικές επιφορτίσεις των αναρτημένων & ημι-αναρτημένων μαζών (N) |
| $Q_j$ | Κατακόρυφο φορτίο τροχού (N) |
| $Q_{nc}$ | Κατακόρυφο ημι-στατικό φορτίο τροχού λόγω της μη-εξισορροπούμενης φυγόκεντρης δύναμης (N) |
| $Q_o$ | Στατικό φορτίο τροχού (N) |
| $\rho_t$ | Συντελεστής ελαστικότητας γραμμής (N/m) |
| $R$ | Ακτίνα καμπύλης στην οριζοντιογραφία (m) |
| $R_W$ | Ακτίνα τροχού οχήματος (m) |
| $R_{rW}$ | Ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας τροχού οχήματος – σιδηροτροχιάς (m) |
| $\sigma(Q_{dyn,um})$ | Τυπική απόκλιση των δυναμικών επι-φορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών (N) |
| $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ | Τυπική απόκλιση των δυναμικών επι-φορτίσεων των αναρτημένων & ημι-αναρτημένων μαζών (N) |
| $S_r$ | Φασματική πυκνότητα ισχύος τραχύτητας σιδηροτροχιών ($m^3$) |
| $S_{Qdyn,um}$ | Φασματική πυκνότητα ισχύος των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών ($N^2/Hz$) |
| $U$ | Κανονική υπερύψωση γραμμής (mm) |
| $V$ | Ταχύτητα οχήματος (m/s) |
| $y$ | Ελαστική κατακόρυφη μετατόπιση της σιδηροτροχιάς (m) |
| $y_g$ | Κατακόρυφη παραμόρφωση της επιφάνειας κύλισης της σιδηροτροχιάς (m) |
| $y_H$ | Ελαστική κατακόρυφη παραμόρφωση του ελατηρίου του Hertz (m) |
| $y_W$ | Ελαστική κατακόρυφη μετατόπιση της μη-αναρτημένης μάζας (m) |
| $\omega$ | Κυκλική συχνότητα (rad/s) |
| $\Omega$ | Χωρική κυκλική συχνότητα (rad/m) |

## 3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΦΟΡΤΙΣΗ ΤΗΣ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΤΡΟΧΟΥ

### 3.1 Μηχανισμός κατακόρυφης φόρτισης

Το κατακόρυφο φορτίο $Q_j$ που ασκείται από τον τροχό ενός σιδηροδρομικού άξονα, με j=1,2,.., επί της σιδηροδρομικής γραμμής, συνίσταται αφενός από το στατικό φορτίο τροχού $Q_o$, ήτοι το ήμισυ του αξονικού φορτίου $Q$ (θεώρηση συμμετρικής φόρτισης), αφετέρου από το σύνολο των δυναμικών επιφορτίσεων $Q_{dyn}$ που προέρχονται από τις μη-αναρτημένες και τις αναρτημένες / ημι-αναρτημένες μάζες του οχήματος, ήτοι τον άξονα και το αμάξωμα

/ φορεία αυτού αντίστοιχα. Στα παραπάνω θα πρέπει να προστεθεί, στην περίπτωση κίνησης του οχήματος σε καμπύλο τμήμα της οριζοντιογραφίας, το ημι-στατικό φορτίο τροχού $Q_{nc}$ που ισούται με την κατακόρυφη συνιστώσα της μη-εξισορροπούμενης φυγόκεντρου δύναμης $F_{nc}$. Σ' ένα τυχαίο σημείο της σιδηροδρομικής γραμμής, ισχύει κατά συνέπεια :

$$Q_j = Q_o + (Q_{nc}) + Q_{dyn} \qquad (3.1)$$

όπου :

$Q_j$ : Κατακόρυφο φορτίο τροχού (σε N)
$Q_o$ : Στατικό φορτίο τροχού (σε N)
$Q_{nc}$ : Κατακόρυφο ημι-στατικό φορτίο τροχού λόγω της μη-εξισορροπούμενης φυγόκεντρου δύναμης (σε N)
$Q_{dyn}$ : Δυναμικό φορτίο τροχού (σε N)

Οι δυναμικές επιφορτίσεις $Q_{dyn}$ που ασκούνται επί της σιδηροδρομικής γραμμής, λόγω της αλληλεπίδρασης με το τροχαίο υλικό, έχουν τυχαίο χαρακτήρα. Με την υπόθεση γραμμικότητας, η μελέτη τους δύναται να λάβει χώρα σε διαφορετικά εύρη συχνοτήτων, αναλόγως του ακριβούς μηχανισμού της ταλάντωσης, των αιτίων που την προκαλούν και των εκάστοτε σωμάτων που συμμετέχουν στην κίνηση.

Ειδικότερα, στις χαμηλές συχνότητες (0-40Hz) το ενδιαφέρον εστιάζεται στην αλληλεπίδραση του συνόλου των αδρανειακών και ελαστικών στοιχείων του οχήματος, ήτοι των μη-αναρτημένων (άξονες), των ημι-αναρτημένων (φορεία) και των αναρτημένων (αμάξωμα) μαζών και της πρωτεύουσας / δευτερεύουσας ανάρτησης με τη σιδηροδρομική γραμμή [4,8,9].Στο υπόψη εύρος συχνοτήτων, η σιδηροδρομική γραμμή εμφανίζεται ιδιαίτερα άκαμπτη σε σχέση με το όχημα με αποτέλεσμα να μη λαμβάνεται υπόψη κατά τη δυναμική μελέτη του μηχανικού συστήματος. Γενεσιουργό μηχανισμό των ταλαντώσεων στο συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων συνιστούν κύρια τα γεωμετρικά σφάλματα γραμμής μεσαίου και μεγάλου μήκους κύματος $\lambda$, ήτοι 3-25m και 25-70m ή 25-120m αντίστοιχα, αναλόγως της ταχύτητας $V$ των οχημάτων, παράμετρο που καθορίζει τη συχνότητα διέγερσης $f$ (f=V/λ, $V$ σε m/s, $\lambda$ σε m, $f$ σε Hz).

Αντίστοιχα, στο πεδίο των μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων (40-400Hz & 400-2000Hz), βάρος δίνεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των μη-αναρτημένων μαζών (άξονες) του οχήματος και της σιδηροδρομικής γραμμής. Στην περίπτωση αυτή, η ανάρτηση του οχήματος απομονώνει το σύνολο των μαζών του, που δύνανται να συμμετάσχουν στην κίνηση, πλην των μη-αναρτημένων μαζών (άξονες), ενώ για τη σιδηροδρομική γραμμή λαμβάνεται υπόψη, κατά τη μελέτη του συστήματος, το σύνολο των στοιχείων – αδρανειακών και ελαστικών – που την αποτελούν [4,8,9]. Γενεσιουργός μηχανισμός των ταλαντώσεων στο παραπάνω εύρος συχνοτήτων δύναται να θεωρηθούν τα γεωμετρικά σφάλματα των σιδηροτροχιών και οι οποιεσδήποτε ασυνέχειες της επιφάνειας κύλισής τους.

### 3.2 Υφιστάμενες μέθοδοι υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού επί της σιδηροδρομικής γραμμής

Η πιθανοτική προσέγγιση που υιοθετείται για τον υπολογισμό του μέγιστου κατακόρυφου φορτίου τροχού στηρίζεται εν γένει στην προσαύξηση της μέσης τιμής του κατακόρυφου φορτίου τροχού $Q_j$, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το επιθυμητό στατιστικά επίπεδο ασφάλειας. Το μέγεθος της προσαύξησης διαφοροποιείται αναλόγως του στοιχείου / στρώσης της σιδηροδρομικής γραμμής που εξετάζεται (Βλέπε § 1). Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται σήμερα [5,6,7,10,11] εφαρμόζονται κατά βάση για τον σχεδιασμό των στρωτήρων γραμμής και όχι για τον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου τροχού. Η αναφορά σε αυτές στην παρούσα εργασία αφορά μόνο στην υιοθετούμενη αρχή υπολογισμού της δυναμικής συνιστώσας του συνολικού φορτίου τροχού και αντίστοιχα αυτού του τελευταίου από κάθε μία μέθοδο.

Διακρίνουμε τις παρακάτω μεθόδους υπολογισμού:

- Τη μέθοδο που προτείνεται από Γερμανούς ερευνητές [10],
- Τη μέθοδο που συστήνεται από Γάλλους ερευνητές [11]
- Τη μέθοδο που έχει προταθεί από Έλληνες επιστήμονες και έχει εφαρμοστεί επιτυχώς στο ελληνικό δίκτυο. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ουσιαστικά τροποποίηση της γαλλικής μεθόδου Συγκεκριμένα ο συντελεστής προσαύξησης στο επίπεδο των στρωτήρων λαμβάνεται ίσος με $n$ =3 αντί για $n$ =2 [2,6,7]. Η δράση επί του στρωτήρα είναι ποσοστό του συνολικού φορτίου τροχού, που διαφοροποιείται για τις δύο μεθόδους

Δεδομένου ότι η πρώτη μέθοδος υπολογισμού δεν λαμβάνει υπόψη διακριτά τη συνεισφορά των μη-αναρτημένων και των αναρτημένων / ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος στο συνολικό φορτίο επί της σιδηροδρομικής γραμμής, δεν εξετάζεται περαιτέρω στο παρόν. Με βάση τις άλλες δύο μεθόδους , το συνολικό κατακόρυφο φορτίο επί της σιδηροδρομικής γραμμής δύναται να ληφθεί ίσο με το άθροισμα του στατικού φορτίου τροχού $Q_o$, του ημι-στατικού φορτίου τροχού $Q_{nc}$ και της μέσης τετραγωνικής τιμής των τυπικών αποκλίσεων των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων και των αναρτημένων / ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος, προσαυξημένης κατά τρόπο που να καλύπτεται η στατιστική πιθανότητα υπέρβασης του υπολογιζόμενου φορτίου υπό πραγματικές συνθήκες[1]. Για το μέγιστο φορτίο τροχού, όπως ορίστηκε στην § 1 θα ισχύει :

$$Q_{max} = Q_o + Q_{nc} + n*[\sigma(Q_{dyn,um})^2 + \sigma(Q_{dyn,ssm})^2]^{1/2} \qquad (3.2)$$

όπου :

$Q_{max}$ : Μέγιστο φορτίο τροχού (σε N)

[1] Η πιθανότητα αυτή διαφοροποιείται αναλόγως του στοιχείου της σιδηροδρομικής γραμμής (φθίνει από την ανώτερη στην κατώτερη στρώση). Δεδομένου ότι στην παρούσα διερευνάται το μέγιστο φορτίο τροχού, θα είναι n=5,00.

$Q_o$ : Όπως στη σχέση (3.1) (σε N)
$Q_{nc}$ : Όπως στη σχέση (3.1) (σε N)
$\sigma(Q_{dyn,um})$ : Τυπική απόκλιση δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος (σε N)
$\sigma(Q_{dyn,ssm})$ : Τυπική απόκλιση δυναμικών επιφορτίσεων των αναρτημένων και ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος (σε N)
$n$ : Συντελεστής πιθανοτικής προσαύ-ξησης της μέσης τετραγωνικής τιμής των τυπικών αποκλίσεων των δυναμικών επιφορτίσεων του οχήματος -

Η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των αναρτημένων και ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ υπολογίζεται με βάση τη σχέση [12] :

$$\sigma(Q_{dyn,ssm}) = (V - 40) * N_L * Q_o * 10^{-3} \quad (3.3)$$

όπου :
$\sigma(Q_{dyn,ssm})$ : Όπως στη σχέση (3.2) (σε t)
$V$ : Ταχύτητα οχήματος (σε km/h)
$N_L$ : Μέση τυπική απόκλιση κατά μήκος υψομετρικού σφάλματος γραμμής (σε mm)
$Q_o$ : Όπως στη σχέση (3.1) (σε t)

Η μέση τυπική απόκλιση του κατά μήκος υψομετρικού σφάλματος γραμμής $N_L$ λαμβάνει τιμές μεταξύ 0,7mm και 1,00mm [1].

Αντίστοιχα, η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,um})$ υπολογίζεται με βάση τη σχέση [1] :

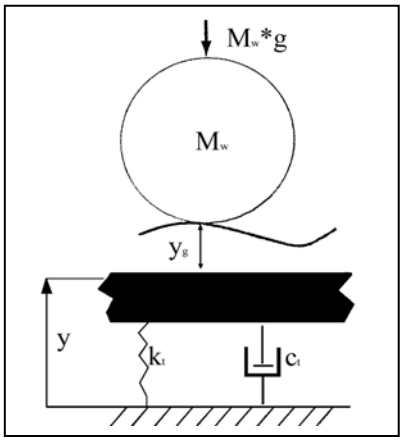
$$\sigma(Q_{dyn,um}) = (0{,}3k_1/200)* V *[(k_t * m_w)/(1{,}7804*75)]^{1/2} \quad (3.4)$$

όπου :
$\sigma(Q_{dyn,um})$ : Όπως στη σχέση (3.2) (σε t)
$V$ : Όπως στη σχέση (3.3) (σε km/h)
$k_1$ : Παράμετρος που χαρακτηρίζει την ποιότητα της επιφάνειας κύλισης των σιδηροτροχιών ως προς την τραχύτητά τους και λαμβάνει τιμές μεταξύ 3 (καλή, τροχισμένη σιδ/χια) και 12 (κακή, μη-τροχισμένη σιδ/χια)
$m_w$ : Μη-αναρτημένη μάζα τροχού (σε t)
$k_t$ : Δυναμικός συντελεστής ελαστικότη-τας γραμμής (σε t/mm), που προκύπτει από την ακόλουθη σχέση [1] :

$$k_t = 2\sqrt{2}\sqrt[4]{E_r I_r \left(\frac{\rho_t}{l_s}\right)^3} \quad (3.5)$$

$E_r$ : Μέτρο ελαστικότητας χάλυβα σιδηροτροχιών (σε t/mm$^2$)
$I_r$ : Ροπή αδράνειας σιδηροτροχιάς (σε mm$^4$)
$\rho_t$ : Συντελεστής ελαστικότητας γραμμής (σε t/mm)
$l_s$ : Απόσταση μεταξύ συνδέσμων (σε mm)

Η σχέση (3.4) είναι ημι-αναλυτική. Προκύπτει από την προσομοίωση της σιδηροδρομικής γραμμής (Σχ.1) με δοκό απείρου μήκους Euler επί μιας ελαστικής στρώσης σε συνδυασμό με αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων επί της γραμμής [1].




Σχ.1. *Μηχανικό μοντέλο αλληλεπίδρασης τροχαίου υλικού-σιδηροδρομικής γραμμής (από [1] – Οι συμβολισμοί του αυθεντικού σχήματος έχουν προσαρμοστεί σε αυτούς του παρόντος κειμένου για λόγους ομοιογένειας).*

Fig.1 *Mechanical model of rolling stock-railway track interaction (from [1] – the symbols of the original figure have been adjusted to the ones of the present text).*

Ο συντελεστής ελαστικότητας γραμμής $\rho_t$ υπολογίζεται από τους επιμέρους συντελεστές ελαστικότητας $\rho_i$ των διαφόρων υλικών της σιδηροδρομικής γραμμής μέσω της σχέσης [1] :

$$\frac{1}{\rho_t} = \sum \frac{1}{\rho_i} \quad (3.6)$$

όπου :

$\rho_t$ : Όπως στη σχέση (3.5) (σε t/mm)
$\rho_i$ : Επιμέρους συντελεστές ελαστικότητας των διαφόρων υλικών της σιδηροδρομικής γραμμής (σε t/mm)

Οι τιμές $\rho_i$ των ελαστικών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής (π.χ. υποθέματα, έρμα, κτλ.) που εισάγονται στη σχέση (3.6), λαμβάνουν υπόψη την επίδραση του κατακόρυφου φορτίου τροχού $Q_j$ και κάθε είδους προφόρτιση που ασκείται στο εκάστοτε στοιχείο ή στρώση της σιδηροδρομικής γραμμής (π.χ. φορτίο σύσφιγξης συνδέσμου και βάρος σιδηροτροχιών ανά στρωτήρα, στην περίπτωση του ελαστικού υποθέματος σιδηροτροχιάς) [1,13].

Με τον τρόπο αυτό προσομοιώνονται καλύτερα οι πραγματικές συνθήκες επί της γραμμής και προκύπτουν με βάση τον τύπο (3.5) τιμές του $k_t$ οι οποίες είναι δυσμενέστερες από ότι στην περίπτωση που αγνοείται η προφόρτιση των στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής, γεγονός που αυξάνει την ασφάλεια εκτίμησης των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος $Q_{dyn,um}$.

# 4. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΤΡΟΧΟΥ

## 4.1 Θεωρητικό υπόβαθρο

Για τον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$, προτείνεται στην παρούσα εργασία μια επέκταση της μεθόδου υπολογισμού, που ήδη περιγράφηκε (§ 3.2). Η προτεινόμενη μέθοδος στηρίζεται στον πλήρως αναλυτικό υπολογισμό των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών $Q_{dyn,um}$ και της συνεισφοράς τους στο συνολικό κατακόρυφο φορτίο τροχού επί της σιδηροδρομικής γραμμής, όπως αυτή εκφράζεται μέσω της τυπικής απόκλισης των δυναμικών επιφορτίσεών $\sigma(Q_{dyn,um})$ στη σχέση (3.2). Κατά συνέπεια, το τυπολόγιο της προτεινόμενης μεθόδου είναι ίδιο μ' αυτό της μεθόδου υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ μέσω ημιαναλυτικού υπολογισμού της συνεισφοράς σ' αυτό των μη-αναρτημένων μαζών του τροχαίου υλικού, πλην της σχέσης (3.4) και όσων έπονται αυτής, βάσει της οποίας υπολογίζεται η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,um})$.

Εν προκειμένω, για τον υπολογισμό της $\sigma(Q_{dyn,um})$, εφαρμόζεται το μαθηματικό προσομοίωμα αλληλεπίδρασης τροχαίου υλικού και σιδηροδρομικής γραμμής στις μεσαίες και υψηλές συχνότητες (40-2000Hz) του Σχ. 2. Το εν λόγω μοντέλο στηρίζεται για τον υπολογισμό της $\sigma(Q_{dyn,um})$ στον προσδιορισμό και στην αξιοποίηση στη συνέχεια της συνάρτησης μεταφοράς (μετατοπίσεων / φορτίου) της επαφής ή αλλιώς της μετατοπισημότητας επαφής (Contact receptance) $H_{yC}$ [8,9]. Επιτυχείς εφαρμογές του εν λόγω μοντέλου αλληλεπίδρασης τροχαίου υλικού - γραμμής, όχι για τον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου τροχού, αλλά για την προσομοίωση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών, αναφέρονται στις βιβλιογραφικές αναφορές [4,8,14].

Πιο συγκεκριμένα, η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,um})$ υπολογίζεται με βάση τη σχέση :

$$\sigma^2(Q_{dyn,um}) = 2\int_{f_1}^{f_2} S_{Q_{dyn,um}}(f)df \qquad (4.1)$$

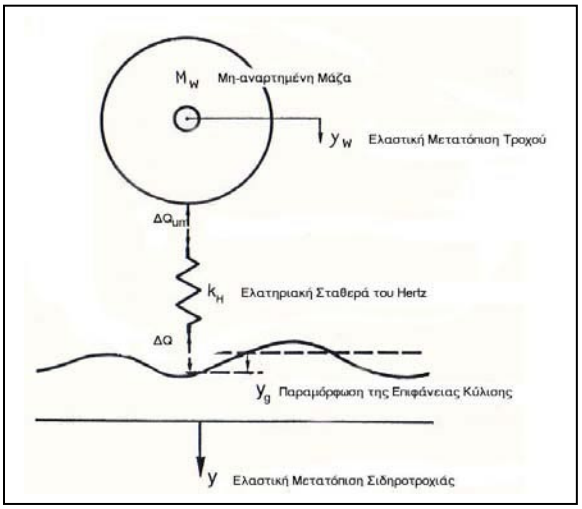
όπου :

$\sigma(Q_{dyn,um})$ : Όπως στη σχέση (3.2) (σε N)

$S_{Qdyn,um}$ : Φασματική πυκνότητα ισχύος των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών (σε $N^2$/Hz)

$f$ : Συχνότητα (σε Hz)

Τα όρια ολοκλήρωσης στη σχέση (3.8) ταυτίζονται με τα όρια ενδιαφέροντος από πλευράς συχνοτήτων για τον υπολογισμό της συνεισφοράς των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος στο μέγιστο φορτίο τροχού, ήτοι 40-2000Hz (μεσαίες και υψηλές συχνότητες).




Σχ.2. *Μηχανικό μοντέλο αλληλεπίδρασης τροχαίου υλικού – σιδηροδρομικής γραμμής στις μεσαίες και υψηλές συχνότητες.*

Fig.2. *Mechanical model of the interaction between rolling stock and railway track in the mid and high frequencies.*

Η φασματική πυκνότητα ισχύος των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών $S_{Qdyn,um}$ υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$S_{Q_{dyn,um}}(f) = \frac{S_r(f)}{\left|H_{yC}^2(f)\right|} \qquad (4.2)$$

όπου :

$S_{Qdyn,um}$ : Όπως στη σχέση (4.1) (σε $N^2$/Hz)

$S_r$ : Φασματική πυκνότητα ισχύος της τραχύτητας των σιδηροτροχιών (σε $m^2$/Hz)

$f$ : Όπως στη σχέση (4.1) (σε Hz)

$H_{yC}$ : Συνάρτηση μεταφοράς (μετατο-πίσεων / φορτίου) της επαφής ή μετατοπισημότητα επαφής (Contact receptance) (σε m/N)

Με βάση το μηχανικό μοντέλο του Σχ. 2, ο υπολογισμός της μετατοπισημότητας επαφής (Contact receptance) $H_{yC}$ γίνεται βάσει της παρακάτω σχέσης :

$$H_{yC} = \frac{1}{-H_{yr} + H_{yW} - H_{yH}} \qquad (4.3)$$

όπου :

$H_{yC}$ : Όπως στη σχέση (4.2) (σε m/N)

$H_{yW}$ : Συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της ελαστικής κατακόρυφης μετατόπισης της μη-αναρτημένης μάζας $Y_W$ και της δυναμικής επιφόρτισης $Q_{dyn,um}$ (Μετατο-πισημότητα τροχού) (σε m/N) που δίνεται από τη σχέση [14] :

$$H_{yW} = \frac{Y_W}{Q_{dyn,um}} = \frac{1}{m_w \omega^2} \quad (4.4)$$

$Q_{dyn,um}$ : Μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών (σε N)

$Y_W$ : Μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της ελαστικής κατακόρυφης μετατόπισης της μη-αναρτημένης μάζας (σε m)

$m_W$ : Όπως στη σχέση (3.4) (σε kg)

$\omega$ : Κυκλική συχνότητα (σε rad/s)

$H_{yH}$ : Συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ της ελαστικής κατακόρυφης παραμόρφωσης του ελατηρίου του Hertz $Y_H$ και της δυναμικής επιφόρτισης $Q_{dyn,um}$ (Μετατοπισημότητα ελατηρίου του Hertz) (σε m/N) που δίνεται από τη σχέση [4,8]:

$$H_{yH} = \frac{Y_H}{Q_{dyn,um}} = \frac{1}{k_H} \quad (4.5)$$

$Q_{dyn,um}$ : Όπως στη σχέση (4.4) (σε N)

$Y_H$ : Μετασχηματισμένη κατά Fourier συνάρτηση της ελαστικής κατακόρυφης παραμόρφωσης του ελατηρίου του Hertz (σε m)

$k_H$ : Ακαμψία ελατηρίου του Hertz (σε N/m)

$H_{yr}$ : Συνάρτηση μεταφοράς (μετατοπίσεων / φορτίου) γραμμής (Σ.Μ.Γ.) ή μετατοπισημότητα γραμμής (Track receptance) (σε m/N)

Η ακαμψία του ελατηρίου του Hertz $k_H$ στη σχέση (4.5) δύναται να υπολογιστεί από την ακόλουθη σχέση [8] :

$$k_H = \sqrt[3]{\frac{6(m_w g)E_r^2 \sqrt{R_w R_{rw}}}{4\left(1-\nu_r^2\right)^2}} \quad (4.6)$$

όπου :

$k_H$ : Όπως στη σχέση (4.5) (σε N/m)

$m_W$ : Όπως στη σχέση (3.4) (σε kg)

$E_r$ : Όπως στη σχέση (3.5) (σε N/m$^2$)

$R_W$ : Ακτίνα τροχού οχήματος (σε m)

$R_{rW}$ : Ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας τροχού οχήματος – σιδηροτροχιάς (σε m)

$\nu_r$ : Λόγος Poisson χάλυβα σιδηροτροχιών

Αντίστοιχα, η φασματική πυκνότητα ισχύος της τραχύτητας των σιδηροτροχιών $S_r$ στη σχέση (4.2) ορίζεται από μια σχέση της ακόλουθης μορφής [14] :

$$S_r = A / \Omega^3 \quad (4.7)$$

όπου :

$S_r$ : Φασματική πυκνότητα ισχύος της τραχύτητας των σιδηροτροχιών (σε m$^3$)

$A$ : Παράμετρος που χαρακτηρίζει την ποιότητα της επιφάνειας κύλισης των σιδηροτροχιών ως προς την τραχύτητά τους

$\Omega$ : Χωρική κυκλική συχνότητα (σε rad/m)

Η παράμετρος $A$ για μια γραμμή ήδη παλαιά (κακή κατάσταση επιδομής) ισούται με $2*10^{-6}$ [1, 2].

Απαραίτητη στη σχέση (4.3) είναι η εισαγωγή της Συνάρτησης Μεταφοράς Γραμμής (Σ.Μ.Γ.) $H_{yr}$ (Track Receptance Function) [15], η οποία εξαρτάται και προσδιορίζεται από τα κατασκευαστικά, γεωμετρικά και δυναμικά χαρακτηριστικά της σιδηροδρομικής γραμμής [8]. Για τον υπολογισμό της απαιτείται η προσομοίωση της σιδηροδρομικής γραμμής μέσω κατάλληλων μηχανικών μοντέλων.

Τα εν λόγω μηχανικά μοντέλα δύναται να είναι δυο ειδών :

- Αριθμητικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται στην αριθμητική επίλυση, πεπερασμένου αριθμού στοιχείων και βαθμού ελευθεριών κίνησης, μηχανικών προσομοιωμάτων της σιδηροδρομικής γραμμής (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων).
- Αναλυτικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται στην επίλυση απλοποιημένων μαθηματικών προσομοιωμάτων της σιδηροδρομικής γραμμής.

Η ακρίβεια ενός μοντέλου προσομοίωσης (αναλυτικού ή αριθμητικού) της σιδηροδρομικής γραμμής εξαρτάται από :

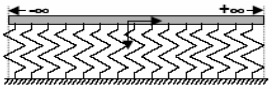
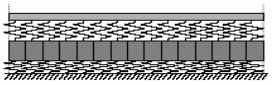
- Την ακρίβεια προσομοίωσης των αδρανειακών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής, ήτοι των στοιχείων εκείνων που ανθίστανται στην επιβαλλόμενη διέγερση λόγω αδράνειας (π.χ. σιδηροτροχιές, πλάκες έδρασης, στρωτήρες).
- Την ακρίβεια προσομοίωσης των ελαστικών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής, ήτοι των στοιχείων εκείνων που στόχο έχουν την κατανομή και την απόσβεση των φορτίων της κυκλοφορίας (π.χ. υποθέματα, έρμα, υποδομή).
- Την ακρίβεια θεώρησης των γεωμετρικών δεδομένων της σιδηροδρομικής γραμμής.
- Την ακρίβεια προσομοίωσης των σχέσεων αλληλεπίδρασης μεταξύ των αδρανειακών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής, οι οποίες επηρεάζονται από τα γεωμετρικά και ελαστικά της χαρακτηριστικά .

Τα αναλυτικά μοντέλα προσομοίωσης υστερούν εν γένει συγκριτικά με τα αριθμητικά σε ό,τι αφορά στην ακρίβεια υπολογισμού. Ωστόσο, είναι σημαντικά πιο εύκολο να εφαρμοστούν, παρέχουν τη δυνατότητα τυποποίησης της διαδικασίας (αλγορίθμου) υπολογισμού, ενώ αναλόγως της πολυπλοκότητάς τους, δύνανται, υπό προϋποθέσεις, να παρέχουν αποτελέσματα που προσεγγίζουν τα αριθμητικά μοντέλα προσομοίωσης [8,9]. Στον Πιν. 1, παρουσιάζονται δυο αντιπροσωπευτικά μαθηματικά (αναλυτικά) μοντέλα προσομοίωσης μιας σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση.

Δεδομένου ότι μια μέθοδος προσδιορισμού του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ θα πρέπει αφενός να παρέχει ακρίβεια, παράλληλα, όμως, ευκολία και τυποποιημένη διαδικασία υπολογισμού, έτσι ώστε να δύναται η δυνατότητα ευρείας

εφαρμογής της, υιοθετήθηκε και προτείνεται, στο πλαίσιο της μεθόδου που παρουσιάζεται, η εφαρμογή του δεύτερου τύπου μοντέλων προσομοίωσης της σιδηροδρομικής γραμμής (αναλυτικά μοντέλα) αντί των πρώτων (αριθμητικά μοντέλα). Στο πλαίσιο αυτό, η επιλογή του μηχανικού μοντέλου προσομοίωσης της σιδηροδρομικής γραμμής (Πιν. 1) για τον υπολογισμό της Συνάρτησης Μεταφοράς Γραμμής (Σ.Μ.Γ.) $H_{yr}$ στη σχέση (4.3) διαφοροποιείται κατά περίπτωση, καθώς εξαρτάται από τον εκάστοτε τύπο της σιδηροδρομικής γραμμής και τα σημαίνοντα για την προσομοίωση χαρακτηριστικά της τα οποία οφείλουν να ληφθούν υπόψη, όπως αυτά επισημάνθηκαν προηγουμένως και αναφέρονται ενδεικτικά στον Πιν. 1.

Πιν.1. *Διάφοροι τύποι σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση και αντιπροσωπευτικά αναλυτικά μοντέλα.*
Tab.1. *Types of ballasted railway track structures and representative analytical models.*

| Χαρακτηριστικά μηχανικού μοντέλου | Τύπος σιδηροδρομικής γραμμής & πεδίο εφαρμογής |
|---|---|
| <u>Μοντέλο 1</u><br>o Δοκός απείρου μήκους Euler ή Timoshenko επί συνεχούς ελαστικού μέσου.<br>o Κατανεμημένα αδρανειακά & ελαστικά χαρακτηριστικά.<br>o Βισκώδης απόσβεση.<br>  <br> | Με εύκαμπτη έδραση, π.χ.<br>o Στην περίπτωση άκαμπτης σύνδεσης σιδηροτροχιάς & στρωτήρα (π.χ. πολύ σκληρό υπόθεμα) και θεώρησης της έδρασης ως μόνης ελαστικής στρώσης.<br>o Στην περίπτωση σιδηροτροχιάς εδραζόμενης απευθείας επί ξύλινου στρωτήρα επί έρματος.<br><br>Βλέπε αναφορές [9,16] |
| <u>Μοντέλο 2</u><br>o Απειρομήκης δοκός Euler ή Timoshenko επί συνεχούς ελαστικού μέσου με αναρτημένες μάζες.<br>o Κατανεμημένα αδρανειακά & ελαστικά χαρακτηριστικά.<br>o Βισκώδης απόσβεση.<br>  | Με εύκαμπτη έδραση.<br>Σιδηροδρομική γραμμή αποτελούμενη από:<br>o Σιδηροτροχιές,<br>o Συνδέσμους & υποθέματα συνδέσμων,<br>o Στρωτήρες,<br>o Έρμα.<br><br>Βλέπε αναφορές [9,16] |

### 4.2 Διαφορές και ομοιότητες με τις υφιστάμενες μεθόδους

Οι ομοιότητες της προτεινόμενης μεθόδου υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ με τη μέθοδο της § 3.2 συνίστανται στα ακόλουθα :

- Υπολογισμός του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ βάσει της σχέσης (3.2).
- Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης των δυναμικών επιφορτίσεων των αναρτημένων και ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ στη σχέση (3.2) βάσει της σχέσης (3.3).

Αντίστοιχα, οι διαφορές της προτεινόμενης μεθόδου υπολογισμού με τη μέθοδο υπολογισμού της § 3.2 συνίστανται στα ακόλουθα :

- Προσομοίωση της σιδηροδρομικής γραμμής (με εύκαμπτη έδραση) με δοκό απείρου μήκους Timoshenko εδραζόμενης επί συνεχούς ελαστικού μέσου μιας ή δυο στρώσεων (στην τελευταία περίπτωση και με αναρτημένες μάζες) (βλ. Πιν. 1) αντί δοκού απείρου μήκους Euler επί μιας ελαστικής στρώσης μόνο (Σχ. 1). Βάσει και των όσων αναφέρθηκαν στην παράγραφο § 4.1 παρέχεται έτσι θεωρητικά η δυνατότητα καλύτερης προσομοίωσης των αδρανειακών και ελαστικών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής και της συνεισφοράς τους στο σύστημα μη-αναρτημένες μάζες – γραμμή. Ειδικότερα :
  - Η θεώρηση της διατμητικής και στρεπτικής αδράνειας της δοκού κατά Timoshenko καθιστά τη δοκό πιο εύκαμπτη σε σχέση με μια δοκό Euler ειδικά στις υψηλές συχνότητες (άνω των 400Hz) γεγονός που συνάδει με τις μετρήσεις επί του πεδίου [16].
  - Η θεώρηση δυο ελαστικών στρώσεων και των στρωτήρων κατά τρόπο διακριτό, αντί μιας μόνο στρώσης (άνευ αναρτημένων μαζών) παρέχει τη δυνατότητα πιο ρεαλιστικής μοντελοποίησης της σιδηροδρομικής γραμμής, η οποία δύναται να παρέχει πληροφορίες, επιπλέον της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης του συνόλου της σιδηροδρομικής γραμμής, για την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης των σιδηροτροχιών επί των υποθεμάτων τους (rail resonance) και των στρωτήρων μεταξύ σιδηροτροχιών και έδρασης (sleeper anti-resonance) [8, 9,14].
- Θεώρηση στο μηχανικό σύστημα μη-αναρτημένων μαζών – γραμμής (Σχ. 2) ενός επιπλέον ελαστικού στοιχείου που χαρακτηρίζει την ελαστικότητα της 'επαφής' (Ελατήριο του Hertz) σε σχέση με το μοντέλο της § 3.2 (Σχ. 1). Το ελατήριο του Hertz, λόγω της μεγάλης τιμής ακαμψίας του για τα συνήθη χαρακτηριστικά οχήματος και γραμμής (Βλέπε σχέση (4.6)) καθορίζει την ευκαμψία του συστήματος μη-αναρτημένων μαζών – γραμμής, όπως εκφράζεται από τη μετατοπισημότητα επαφής (Contact receptance) $H_{yC}$, στις υψηλές κυρίως συχνότητες, (άνω των 1000Hz) [4,8]. Αποτελεί λοιπόν ένα επιπλέον στοιχείο που οφείλει να ληφθεί υπόψη στο μοντέλο προσομοίωσης μη-αναρτημένων μαζών – γραμμής, καθώς θεωρητικά αυξάνει την ακρίβεια της προσομοίωσης, ειδικά στις συχνότητες άνω των 1000Hz, ήτοι εντός του ήμισυ και πλέον του εύρους συχνοτήτων (40-2000Hz) εντός του οποίου εντοπίζεται η συνεισφορά των μη-αναρτημένων μαζών στο συνολικό κατακόρυφο φορτίο τροχού (μέγιστο φορτίο τροχού). Επιπλέον, επιτρέπει θεωρητικά να ληφθούν υπόψη τα εκάστοτε χαρακτηριστικά του τροχαίου υλικού – σχέση (4.6).
- Οι τιμές ακαμψίας που λαμβάνονται υπόψη στα μοντέλα γραμμής του Πιν. 1 (προτεινόμενη μέθοδος) είναι οι τιμές δυναμικής ακαμψίας, όπως έχουν προκύψει από πειραματικές μετρήσεις, ήτοι δεν γίνεται χρήση

των τιμών στατικής ακαμψίας και της σχέσης (3.5) για τον υπολογισμό των δυναμικών τιμών ακαμψίας (οι οποίες εισάγονται τελικά στο μοντέλο προσομοίωσης αναρτημένων μαζών – γραμμής (Σχ. 1) – σχέση (3.4) της μεθόδου της § 3.2). Στην τελευταία περίπτωση, οι τιμές στατικής ακαμψίας $\rho_i$ των ελαστικών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής που εισάγονται στη σχέση (3.6) και κατά συνέπεια στην (3.5), και δη σε ό,τι αφορά τα υποθέματα, προκύπτουν από διαγράμματα φορτίου – παραμορφώσεων υπό συνθήκες συνδυασμένης φόρτισης με στατικό και δυναμικό φορτίο χαμηλής συχνότητας (ημι-στατικό φορτίο) [17]. Για προφανείς λόγους, οι τιμές αυτές είναι εν γένει μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές ακαμψίας των υλικών (κυρίως των υποθεμάτων) υπό συνθήκες καθαρά δυναμικής φόρτισης, όπως αποδεικνύεται και από τις βιβλιογραφικές αναφορές [9,13,15]. Επιπλέον, δεν ανταποκρίνονται στο εύρος συχνοτήτων όπου οι μη-αναρτημένες μάζες αποκτούν καθοριστική σημασία (>40Hz), ενώ όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφική αναφορά [13], ο ρυθμός μεταβολής της ακαμψίας υποθεμάτων σιδηροτροχιών και έρματος συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης δεν είναι ο αυτός, κατά συνέπεια η εφαρμογή ενός κοινού πολλαπλασιαστικού συντελεστή επί της κοινής στατικής ακαμψίας του συνόλου της σιδηροδρομικής γραμμής $\rho_t$ – σχέση (3.6) – για τον υπολογισμό της δυναμικής ακαμψίας $k_t$ εύλογα δεν φαντάζει ως η πλέον κατάλληλη επιλογή. Το σύνολο των παραπάνω αυξάνει την πιθανότητα υποεκτίμησης της πραγματικής ακαμψίας της σιδηροδρομικής γραμμής υπό συνθήκες καθαρά δυναμικής φόρτισης (συνεπώς και των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών), για τον λόγο αυτό και θεωρείται προτιμότερη η απευθείας εφαρμογή τιμών δυναμικής ακαμψίας, όπως προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις επί τόπου ή στο εργαστήριο.

Οι διαφορές που επισημάνθηκαν μεταξύ της προτεινόμενης μεθόδου υπολογισμού του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ και της μεθόδου υπολογισμού της § 3.2, δεν επιτρέπουν τη σύγκριση μεταξύ τους λόγω ακριβώς της τελευταίας πιο πάνω διαφοράς τους και του γεγονότος ότι η μέθοδος της § 3.2 είναι ημι-αναλυτική (ήτοι βασίζεται σ' ένα αναλυτικό μοντέλο που προσεγγίζει την πράξη, για τη βελτιστοποίηση ωστόσο του οποίου και την εξαγωγή των τελικών σχέσεων υπολογισμού έχουν επιπλέον ληφθεί υπόψη αποτελέσματα πειραματικών μετρήσεων).

## 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η αριθμητική εφαρμογή αφορά μόνο στην προτεινόμενη μέθοδο. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκαν αμφότερα μοντέλα γραμμής του Πιν. 1 και τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν μεταξύ τους.

### 5.1. Δεδομένα εισόδου

Θεωρήθηκε σιδηροδρομική γραμμή με έρμα, σιδηροτροχιές UIC 54 και ολόσωμους στρωτήρες σκυροδέματος. Οι τιμές ακαμψίας και απόσβεσης των ελαστικών στοιχείων της σιδηροδρομικής γραμμής θεωρήθηκαν μεταβλητές εντός ενός 'λογικού', με βάση τη βιβλιογραφία [8,9], εύρους τιμών και βάσει αυτών (βλ. Πιν. 2) πραγματοποιήθηκε παραμετρική ανάλυση.

Πιν. 2 *Δεδομένα εισόδου για τη σιδηροδρομική γραμμή.*
Tab. 2 *Ballasted track input data.*

| Σιδηροδρομική γραμμή | | |
|---|---|---|
| $E_r$ | $210*10^9$ | $N/m^2$ |
| $d_r$ | 7850 | $kg/m^3$ |
| $\nu_r$ | 0.30 | - |
| $\kappa_r$ | 0,40 | - |
| $I_r$ | $2346*10^{-8}$ | $m^4$ |
| $A_r$ | $6930*10^{-6}$ | $m^2$ |
| $M_s$ | 290 | kg |
| $l_s$ | 0,60 | m |
| $k_p$ | Μεταβλητό $20*10^6$-$1200*10^6$ | N/m |
| $k_b$ | Μεταβλητό $30*10^6$-$200*10^6$ | N/m |
| $c_p$ | Μεταβλητό $5*10^3$-$70*10^3$ | N/m/s |
| $c_b$ | Μεταβλητό $15*10^3$-$150*10^3$ | N/m/s |
| $A$ | $2*10^{-6}$ | - |
| $N_L$ | 1,00 | mm |
| $R$ | 1750 | m |
| $U$ | 150 | mm |

Τα χαρακτηριστικά του οχήματος, τα οποία λήφθηκαν υπόψη στους υπολογισμούς, παρουσιάζονται στον Πιν. 3.

Πιν. 3 *Δεδομένα εισόδου για το τροχαίο υλικό.*
Tab. 3 *Rolling stock input data.*

| Τροχαίο υλικό | | |
|---|---|---|
| $Q_o$ | 10 | t |
| $m_w$ | 750 | kg |
| $k_H$ | $1657*10^9$ | N/m |
| $h_{KB}$ | 1,20 | m |
| $V$ | 200 | km/h |

### 5.2 Πορεία υπολογισμού – Παραδοχές

Το σύνολο των πράξεων εκτελέστηκε σε περιβάλλον MATLAB®.

Από τα δεδομένα εισόδου, υπολογίστηκε αρχικά –σχέση (4.1) με βάση την προτεινόμενη μέθοδο – η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,um})$. Επισημαίνεται ότι :

- Η σιδηροδρομική γραμμή προσομοιώθηκε με δοκό απείρου μήκους Euler χωρίς αναρτημένες μάζες (Μοντέλο 1 στον Πιν. 1) και δοκό απείρου μήκους Timoshenko με αναρτημένες μάζες (Μοντέλο 2 στον Πιν. 1) αντίστοιχα.
- Για τον υπολογισμό του ενός και μόνο δυναμικού συντελεστή ελαστικότητας γραμμής $k_t$ του Μοντέλου 1 στον Πιν. 1, την εξασφάλιση αντιστοιχίας με τις διακριτές τιμές ακαμψίας (υπόθεμα, έρμα) του Μοντέλου 2 του Πιν. 1 και τη δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δυο μοντέλων γραμμής έγινε δεκτό ότι [8] :

$$k_t = 4\pi^2 f_t^{\,2} \,(M_s / l_s + A_r d_r) \qquad (5.1)$$

όπου :

$k_t$ : Όπως στη σχέση (3.5) (σε N)
$M_s$ : Μάζα στρωτήρα (σε kg)
$l_s$ : Όπως στη σχέση (3.5)
$f_t$ : Ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης σιδηροδρομικής γραμμής (σε Hz)
$A_r$ : Εμβαδόν διατομής σιδηροτροχιάς ($m^2$)
$d_r$ : Πυκνότητα χάλυβα σιδηροτροχιών ($kg/m^3$)

Στη σχέση (5.1) η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της σιδηροδρομικής γραμμής $f_t$ προκύπτει μέσω υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς γραμμής (Σ.Μ.Γ.) $H_{yr}$ με βάση το Μοντέλο 2 του Πιν. 1. Γενικά, για μια γραμμή με εύκαμπτη έδραση, είναι 40Hz < $f_t$ <140Hz [8]. Η τιμή της $k_t$ , που προκύπτει με βάση τη σχέση (5.1), ισούται κατά προσέγγιση με την τιμή του δυναμικού συντελεστή ελαστικότητας έρματος $k_b$, όπως αποδεικνύεται (§ 5.3) και από τους σχετικούς υπολογισμούς.

Κατόπιν υπολογισμού της $\sigma(Q_{dyn,um})$ υπολογίστηκε βάσει της σχέσης (3.3) η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των αναρτημένων και ημι-αναρτημένων μαζών του οχήματος $\sigma(Q_{dyn,ssm})$.

Για τις τιμές $\sigma(Q_{dyn,um})$ και $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ που προέκυψαν κατά περίπτωση, υπολογίστηκε, με βάση τη σχέση (3.2), το μέγιστο φορτίο Τροχού $Q_{max}$.

### 5.3 Αποτελέσματα

#### Διερεύνηση της σχέσης (5.1)

Στόχος της διερεύνησης είναι ο προσδιορισμός της αντιστοιχίας μεταξύ του μηχανικού μοντέλου γραμμής με δοκό απείρου μήκους Euler (Μοντέλο 1 στον Πιν. 1) και του μηχανικού μοντέλου γραμμής με δοκό απείρου μήκους Timoshenko με αναρτημένες μάζες (Μοντέλο 2 στον Πιν. 1), σε ό,τι αφορά στις δυναμικές τιμές ακαμψίας των ελαστικών στρώσεων που λαμβάνονται υπόψη σε κάθε περίπτωση ($k_t$ στην περίπτωση του Μοντέλου 1 και $k_b$, $k_p$ στην περίπτωση του Μοντέλου 2). Το πρόβλημα έγκειται στην επιλογή της ορθής τιμής δυναμικής ακαμψίας $k_t$, που οφείλει να ληφθεί υπόψη για τη μόνη ελαστική στρώση του μηχανικού μοντέλου γραμμής με δοκό απείρου μήκους Euler, κατά τρόπο που να είναι δυνατή η περαιτέρω σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο μοντέλων γραμμής στη βάση των ίδιων δεδομένων εισόδου (βλ. Πιν. 2 και 3).

Στο πλαίσιο αυτό, υπολογίστηκε η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της σιδηροδρομικής γραμμής $f_t$ με βάση το Μοντέλο 2 του Πιν. 1 μέσω υπολογισμού της συνάρτησης μεταφοράς γραμμής (Σ.Μ.Γ.) $H_{yr}$. Από την τιμή της $f_t$ υπολογίστηκε με βάση τη σχέση (5.1), η προσεγγιστική τιμή της $k_t$ (Μοντέλο 1) που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες τιμές $k_b$ και $k_p$ (Μοντέλο 2). Μελετήθηκαν οι εξής περιπτώσεις :

- Περίπτωση Α: Μεταβολή του $k_p$ – Σταθερές τιμές $c_p$, $k_b$, $c_b$ (2 υποπεριπτώσεις, ήτοι μιας 'σκληρής' και μιας 'μαλακής' υποδομής).
- Περίπτωση Β: Μεταβολή του $k_b$ – Σταθερές τιμές $k_p$, $c_p$, $c_b$.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πιν. 4 και 5 αντίστοιχα. Επισημαίνεται, ότι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της σιδηροδρομικής γραμμής δεν επηρεάζεται από τη μεταβολή της τιμής (ή των τιμών) απόσβεσης των ελαστικών στοιχείων της (ήτοι εν προκειμένω $c_p = c_b = 0$). Γι' αυτό και η επίδρασή τους δεν μελετήθηκε περαιτέρω.

Παρατηρούμε ότι :

- Περίπτωση Α – Υποπερίπτωση 'μαλακής' υποδομής: Η τιμή του $k_t$ (Μοντέλο 1), όπως υπολογίζεται από τη σχέση (5.1), ισούται με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση (διαφορά < ~ -3,5%), εκτός της ακραίας περίπτωσης πολύ 'μαλακού' υποθέματος ($k_p$= 20-40MN/m), με την πραγματική τιμή του δυναμικού συντελεστή ελαστικότητας έρματος $k_b$. Η διαφορά μειώνεται όσο 'σκληρότερο' γίνεται το υπόθεμα και ειδικά για $k_p > k_b$.
- Περίπτωση Α – Υποπερίπτωση 'σκληρής' υποδομής: Η τιμή του $k_t$ (Μοντέλο 1), όπως υπολογίζεται από τη σχέση (5.1), ισούται με πολύ ικανοποιητική προσέγγιση (διαφορά της τάξης του ~ -1,50% και λιγότερο) με την πραγματική τιμή του δυναμικού συντελεστή ελαστικότητας έρματος $k_b$, στις περιπτώσεις εκείνες που η ακαμψία του υποθέματος είναι μεγαλύτερη από αυτή της υποδομής (έρματος), ήτοι για $k_p > k_b$. Για $k_p < k_b$, η τιμή ακαμψίας του υποθέματος επιδρά καθοριστικά στη συνολική ελαστικότητα της γραμμής ($k_t$), η επίδραση δε αυτή είναι πολύ πιο σημαντική απ' ότι στην περίπτωση γραμμής με 'μαλακή' υποδομή, με αποτέλεσμα η τιμή του $k_b$ να απέχει αρκετά από την τιμή του $k_t$ που προκύπτει από τη σχέση (5.1).
- Περίπτωση Α – Αμφότερες υποπεριπτώσεις 'σκληρής' και 'μαλακής' υποδομής : Η σταθεροποίηση των τιμών της $f_t$ άνω μιας ορισμένης τιμής $k_p$, η οποία προφανώς εξαρτάται από τη σχετική τιμή της $k_b$, είναι αναμενόμενη

και συνάδει με τα αποτελέσματα του [18].

- Περίπτωση Β: Η τιμή του $k_t$ (Μοντέλο 1), όπως υπολογίζεται από τη σχέση (5.1), κυμαίνεται με απόκλιση μικρότερη του -5% γύρω από την πραγματική τιμή του δυναμικού συντελεστή ελαστικότητας έρματος $k_b$.

Τα αποτελέσματα των Πιν. 4 και 5 τεκμηριώνουν την αναμενόμενη δυσκολία επιτυχούς αντικατάστασης ενός μοντέλου γραμμής με περισσότερες ελευθερίες κίνησης (Μοντέλο 2 στον Πιν. 1) από ένα απλούστερο μαθηματικό μοντέλο (Μοντέλο 1 στον Πιν. 1).

Πιν. 4 *Εκτιμώμενες τιμές $k_t$ – Περίπτωση Α: $k_p$ μεταβλητό, $k_b$ = 60MN/m ('μαλακή' υποδομή) και $k_b$ = 200MN/m ('σκληρή' υποδομή).*

Tab. 4 *Estimated values of $k_t$ – Case A: $k_p$ variable, $k_b$ = 60MN/m ('soft' substructure) and $k_b$ = 200MN/m ('stiff' substructure).*

| Περίπτωση Α – 1.'Μαλακή' υποδομή | | | |
|---|---|---|---|
| $k_p$ | $f_t$ | $k_t$ | $(k_t-k_b)/k_b$ |
| (MN/m) | (Hz) | (MN/m) | % |
| 20 | 86 | 51,87 | -13,55% |
| 40 | 90 | 56,80 | -5,33% |
| 80 | 91 | 58,07 | -3,21% |
| 160 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 320 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 500 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 750 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 900 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 1000 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 1200 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| Περίπτωση Α – 2.'Σκληρή' υποδομή | | | |
| $k_p$ | $f_t$ | $k_t$ | $(k_t-k_b)/k_b$ |
| (MN/m) | (Hz) | (MN/m) | % |
| 20 | 114 | 91,14 | -49,37% |
| 40 | 140 | 137,45 | -23,64% |
| 80 | 152 | 162,03 | -9,98% |
| 160 | 157 | 172,86 | -3,97% |
| 320 | 159 | 177,29 | -1,50% |
| 500 | 159 | 177,29 | -1,50% |
| 750 | 160 | 179,53 | -0,26% |
| 900 | 160 | 179,53 | -0,26% |
| 1000 | 160 | 179,53 | -0,26% |
| 1200 | 160 | 179,53 | -0,26% |

Πιν. 5 *Εκτιμώμενες τιμές $k_t$ – Περίπτωση Β: $k_b$ μεταβλητό, $k_p$ = 200MN/m.*

Tab. 5 *Estimated values of $k_t$ – Case B: $k_b$ variable, $k_p$ = 200MN/m.*

| Περίπτωση Β | | | |
|---|---|---|---|
| $k_b$ | $f_t$ | $k_t$ | $(k_t-k_b)/k_b$ |
| (MN/m) | (Hz) | (MN/m) | % |
| 30 | 65 | 29,63 | -1,23% |
| 45 | 80 | 44,88 | -0,26% |
| 60 | 92 | 59,36 | -1,07% |
| 80 | 106 | 78,80 | -1,50% |
| 100 | 118 | 97,65 | -2,35% |
| 120 | 129 | 116,70 | -2,75% |
| 140 | 139 | 135,50 | -3,22% |
| 160 | 149 | 155,69 | -2,69% |
| 180 | 157 | 172,86 | -3,97% |
| 200 | 166 | 193,25 | -3,38% |

Παρά το γεγονός ότι για την αντιστοίχιση μεταξύ του μηχανικού μοντέλου γραμμής με δοκό απείρου μήκους Euler (Μοντέλο 1 στον Πιν. 1) και του μηχανικού μοντέλου γραμμής με δοκό απείρου μήκους Timoshenko με αναρτημένες μάζες (Μοντέλο 2 στον Πιν. 1), σε ό,τι αφορά στις δυναμικές τιμές ακαμψίας των ελαστικών στρώσεων που λαμβάνονται υπόψη σε κάθε περίπτωση ($k_t$ στην περίπτωση του Μοντέλου 1 και $k_b$, $k_p$ στην περίπτωση του Μοντέλου 2), είναι δυνατή η θεώρηση $k_t = k_b$ στις περισσότερες των περιπτώσεων (εκτός των εξαιρέσεων που αναφέρθηκαν) για λόγους ακρίβειας, θα εφαρμοστεί στη συνέχεια του παρόντος η σχέση (5.1).

Σύγκριση αποτελεσμάτων για τα δυο μοντέλα γραμμής

Η σύγκριση αφορά στις ακόλουθες περιπτώσεις :

- Πιν. 6: $k_b$, $c_b$ σταθερά (δυο τύποι υποδομής 'μαλακή', 'σκληρή'), $k_p$ μεταβαλλόμενο ($c_p$ σταθερό).

Πιν. 6 *$k_p$ μεταβαλλόμενο - Τιμές ακαμψίας και απόσβεσης υποθεμάτων και υποδομής.*

Tab. 6 *Variable $k_p$ - Stiffness and damping values for pads and substructure.*

| Περίπτωση Α - $k_p$ μεταβαλλόμενο Χαρακτηριστικά υποθεμάτων / υποδομής | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Υπόθεμα | $k_p$=20MN/m | $k_p$=40MN/m | $k_p$=160MN/m | $k_p$=750MN/m |
| | $c_p$=17kN/m/s | | | |
| Υποδομή (Έρμα) | 'Μαλακή' $k_b$ = 60MN/m $c_b$ = 57kN/m/s | | 'Σκληρή' $k_b$ = 180MN/m $c_b$ = 82kN/m/s | |

❑ Πιν. 7: $k_p$, $c_p$ σταθερά, $k_b$ μεταβαλλόμενο ($c_b$ σταθερό).

Πιν. 7 *$k_b$ μεταβαλλόμενο - Τιμές ακαμψίας και απόσβεσης υποθεμάτων και υποδομής.*

Tab. 7 *Variable $k_b$ - Stiffness and damping values for pads and substructure.*

| Περίπτωση Β – $k_b$ μεταβαλλόμενο Χαρακτηριστικά υποθεμάτων / υποδομής | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Υπόθεμα | $k_p$=200MN/m | | | |
| | $c_p$=50kN/m/s | | | |
| Υποδομή (Ερμα) | $k_b$=45MN/m | $k_b$=80MN/m | $k_b$=120MN/m | $k_b$=180MN/m |
| | $c_b$=57kN/m/s | | | |

Επισημαίνεται ότι οι χαρακτηρισμοί 'μαλακή', 'σκληρή' έχουν δοθεί από τους συγγραφείς της εργασίας και είναι σχετικοί (σ.σ. για το εύρος κύμανσης των παραπάνω μεγεθών, βλ. Πιν. 3).

Αρχικά, υπολογίστηκε, όπως επισημαίνεται στην § 5.2, η τυπική απόκλιση των δυναμικών επιφορτίσεων των μηαναρτημένων μαζών $\sigma(Q_{dyn,um})$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πιν. 8 για την Περίπτωση Α (Πιν. 6) και στον Πιν. 9 για την Περίπτωση Β (Πιν. 7).

Πιν. 8 *Εκτιμώμενες τιμές $\sigma(Q_{dyn,um})$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*

Tab. 8 *Estimated values of $\sigma(Q_{dyn,um})$, M1 : Track Model 1, M2 : Track Model 2.*

| Περίπτωση Α – 1.'Μαλακή' υποδομή | | | |
|---|---|---|---|
| $k_p$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M1}$ | $\Delta\sigma(Q_{dyn,um})$ / $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | % |
| 20 | 19,16 | 27,14 | -41,65 |
| 40 | 23,59 | 28,27 | -19,84 |
| 160 | 27,52 | 28,85 | -4,83 |
| 750 | 30,71 | 28,85 | 6,06 |
| Περίπτωση Α – 2.'Σκληρή' υποδομή | | | |
| $k_p$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M1}$ | $\Delta\sigma(Q_{dyn,um})$ / $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | % |
| 20 | 19,76 | 32,51 | -64,52 |
| 40 | 26,82 | 39,89 | -48,73 |
| 160 | 47,60 | 44,92 | 5,63 |
| 750 | 49,89 | 45,81 | 8,18 |

Πιν. 9 *Εκτιμώμενες τιμές $\sigma(Q_{dyn,um})$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*

Tab. 9 *Estimated values of $\sigma(Q_{dyn,um})$, M1 : Track Model 1, M2 : Track Model 2.*

| Περίπτωση Β | | | |
|---|---|---|---|
| $k_b$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ | $\sigma(Q_{dyn,um})_{M1}$ | $\Delta\sigma(Q_{dyn,um})$ / $\sigma(Q_{dyn,um})_{M2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | % |
| 45 | 24,31 | 25,51 | -4,94 |
| 80 | 32,81 | 33,09 | -0,85 |
| 120 | 42,90 | 40,48 | 5,64 |
| 180 | 55,31 | 49,62 | 10,29 |

Στη συνέχεια υπολογίστηκε, όπως επισημαίνεται στην § 5.2, το Μέγιστο Φορτίο Τροχού $Q_{max}$.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στους Πιν. 10 και 11 (Περίπτωση Α – Πιν. 8 και Β – Πιν. 9 αντίστοιχα). Επισημαίνεται ότι :

❑ $\sigma(Q_{dyn,ssm}) = 0{,}16Q_o = 1{,}6t$ ή 15,696kN από τη σχέση (3.4) ($g = 9{,}81m/s^2$).

❑ $Q_{nc} = 12{,}526kN$.

Πιν. 10 *Εκτιμώμενες τιμές $Q_{max}$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*

Tab. 10 *Estimated values of $Q_{max}$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*

| Περίπτωση Α – 1.'Μαλακή' υποδομή | | | |
|---|---|---|---|
| $k_p$ | $Q_{maxM2}$ | $Q_{maxM1}$ | $\Delta Q_{max}$ / $Q_{maxM2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | % |
| 20 | 234,47 | 267,39 | -14,04 |
| 40 | 252,30 | 272,30 | -7,93 |
| 160 | 269,03 | 274,84 | -2,16 |
| 750 | 283,07 | 274,84 | 2,91 |
| Περίπτωση Α – 2.'Σκληρή' υποδομή | | | |
| $k_p$ | $Q_{maxM2}$ | $Q_{maxM1}$ | $\Delta Q_{max}$ / $Q_{maxM2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | (%) |
| 20 | 236,80 | 291,13 | -22,94 |
| 40 | 266,00 | 324,96 | -22,16 |
| 160 | 361,23 | 348,54 | 3,51 |
| 750 | 372,13 | 352,75 | 5,21 |

Πιν. 11 *Εκτιμώμενες τιμές $Q_{max}$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*
Tab. 11 *Estimated values of $Q_{max}$, M1 : Μοντέλο Γραμμής 1, M2: Μοντέλο Γραμμής 2.*

| Περίπτωση Β | | | |
|---|---|---|---|
| $k_b$ | $Q_{maxM2}$ | $Q_{maxM1}$ | $\Delta Q_{max} / Q_{maxM2}$ |
| (MN/m) | (kN) | (kN) | % |
| 45 | 255,31 | 260,39 | -1,99 |
| 80 | 292,48 | 293,75 | -0,43 |
| 120 | 339,03 | 327,71 | 3,34 |
| 180 | 398,10 | 370,84 | 6,85 |

**Σχολιασμός των αποτελεσμάτων**

Από τα αποτελέσματα του Πιν. 8, και συγκεκριμένα στην περίπτωση 'μαλακής' υποδομής (Υπο-περίπτωση Α.1), προκύπτουν διαφορές σε επίπεδο τιμών $\sigma(Q_{dyn,um})$ μεταξύ των δυο μοντέλων της τάξης του 40% και πλέον. Η εν λόγω ακραία τιμή εντοπίζεται συγκεκριμένα στην περίπτωση 'πολύ μαλακού' υποθέματος ($k_p \leq$ 20MN/m), όπου το Μοντέλο 1 του Πιν. 1 δίνει σημαντικά μεγαλύτερες τιμές από το Μοντέλο 2. Η εν λόγω διαφορά μειώνεται όσο αυξάνεται η ακαμψία του υποθέματος και το πρόσημο της αντιστρέφεται σε υψηλές σχετικά τιμές ακαμψίας του υποθέματος γραμμής (εκτιμάται περί τα 320MN/m).

Αντίστοιχα, στην περίπτωση 'σκληρής' υποδομής (Υποπερίπτωση Α.2 – Πιν. 8), τα αποτελέσματα των δυο μοντέλων γραμμής σε επίπεδο τιμών $\sigma(Q_{dyn,um})$ διαφοροποιούνται έως και 65% περίπου. Και στην υποπερίπτωση αυτή, όπως και προηγουμένως, η εν λόγω ακραία τιμή εντοπίζεται στην περίπτωση 'πολύ μαλακού' υποθέματος ($k_p \leq$ 20MN/m), όπου το Μοντέλο 1 του Πιν. 1 δίνει σημαντικά μεγαλύτερες τιμές από το Μοντέλο 2. Η εν λόγω διαφορά μειώνεται όσο αυξάνεται η ακαμψία του υποθέματος και το πρόσημο της εκτιμάται ότι αντιστρέφεται περί τα 80MN/m περίπου.

Συμπερασματικά, παρατηρείται σε αμφότερες περιπτώσεις ότι στην περίπτωση 'μέτριου' και 'σκληρού' υποθέματος οι τιμές που προκύπτουν με βάση το Μοντέλο 2 του Πιν.1 είναι μεγαλύτερες του Μοντέλου 1 και αντίστροφα, στην περίπτωση 'μαλακού' έως 'πολύ μαλακού' υποθέματος, οι τιμές που προκύπτουν με βάση το Μοντέλο 1 του Πιν.1 είναι μεγαλύτερες του Μοντέλου 2.

Από τον Πιν. 9, προκύπτουν αντίστοιχα διαφορές σε επίπεδο τιμών $\sigma(Q_{dyn,um})$ μεταξύ των δυο μοντέλων έως και ~10% υπέρ του Μοντέλου 2 έναντι του Μοντέλου 1 του Πιν. 1 για υψηλές τιμές ακαμψίας του έρματος. Η διαφορά αυτή μειώνεται όσο μειώνεται η ακαμψία του έρματος και το πρόσημό της αντιστρέφεται περί τα 80MN/m περίπου (τιμή $k_b$).

Οι διαφορές που επισημάνθηκαν, μπορούν να αποδοθούν αφενός στο γεγονός ότι η σχέση (5.1) είναι προσεγγιστική και όχι απόλυτα ακριβής, αφετέρου στο γεγονός ότι το Μοντέλο 1 του Πιν. 1 δεν προσομοιώνει ικανοποιητικά (σε σχέση με την πραγματικότητα) τη συνάρτηση μεταφοράς γραμμής (Σ.Μ.Γ.) $H_{yr}$, παρά μόνο στις περιπτώσεις που αναφέρονται στον Πιν. 1 και προκύπτουν και με βάση τους υπολογισμούς (περιπτώσεις 'σκληρών' υποθεμάτων γραμμής). Στις λοιπές περιπτώσεις, το Μοντέλο 1 του Πιν.1 τείνει να υποεκτιμά τη συνάρτηση $H_{yr}$. Αυτό σημαίνει 'σκληρότερη' από ότι στην πραγματικότητα γραμμή και συνεπώς υψηλότερες τιμές δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών $Q_{dyn,um}$, όπως εκφράζονται μέσω της τυπικής απόκλισής τους $\sigma(Q_{dyn,um})$.

Οι παραπάνω διαφορές σε επίπεδο τιμών $\sigma(Q_{dyn,um})$ μεταξύ των δυο μοντέλων γραμμής του Πιν. 1, αμβλύνονται κατά τον υπολογισμό των τιμών του μέγιστου φορτίου τροχού $Q_{max}$ λόγω της τετραγωνικής ρίζας στη σχέση (3.2). Οι διαφορές έτσι κυμαίνονται στην περίπτωση 'μαλακής' υποδομής (Υποπερίπτωση Α.1 – Πιν. 10) από -15/+3%, στην περίπτωση 'σκληρής' υποδομής (Υποπερίπτωση Α.2 – Πιν. 10) από -23/+5%, ενώ στην Περίπτωση Β (Πιν. 11) από -2/+6%.

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή προτείνεται μια νέα μέθοδος για τον υπολογισμό του μέγιστου φορτίου τροχού. Η προτεινόμενη μέθοδος στηρίζεται στον πλήρως αναλυτικό υπολογισμό των δυναμικών επιφορτίσεων των μη-αναρτημένων μαζών και της συνεισφοράς τους στο συνολικό κατακόρυφο φορτίο που ασκείται από τον τροχό επί σιδηροδρομικής γραμμής με εύκαμπτη έδραση. Δύναται να χρησιμοποιηθεί ως έχει στη διαδικασία μελέτης και σχεδιασμού των σιδηροτροχιών και με κατάλληλες τροποποιήσεις στον σχεδιασμό άλλων στοιχείων της γραμμής.

Στο πλαίσιο της ερευνητικής αυτής εργασίας δεν κατέστη εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων της προτεινόμενης μεθόδου με κάποια από τις υφιστάμενες μεθόδους προσδιορισμού του κατακόρυφου φορτίου τροχού και του μέγιστου φορτίου τροχού αντίστοιχα. Για τον λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμη, σε μεταγενέστερο στάδιο, η επαλήθευση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας και η σύγκρισή τους με τα αντίστοιχα άλλων μεθόδων μέσω μετρήσεων επί του πεδίου.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γιαννακός Κ., *'Δράσεις στη Σιδηροδρομική Γραμμή'*, Εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 2002.
2. Alias J., *'La Voie Ferrée'*, Editions Eyrolles, Paris, 1997.
3. Orringer O., Jeong D.Y., Tang Y.H., *'Estimation of Rail Wear Limits Based on Rail Strength Investigations'*, Report, Federal Railroad Administration, U.S. Department of Transportation, Washington, 1998.

4. Esveld C., *'Modern Railway Track'*, Ed. MRT-Productions, West Germany, 1989.
5. Γιαννακός Κ., Βλασοπούλου Ι., *'Φόρτιση Στρωτήρων από Σκυρόδεμα και Εφαρμογή για Διμερείς Στρωτήρες'*, Τεχνικά Χρονικά, Τόμος 14, Τεύχος 2, 1994, pp. 24-42.
6. Giannakos K., *'Influence of high-resilient fastenings on the track mass participating in the motion of unsprung masses'*, Advanced Characterization of Pavement and Soil Eng. Materials ,Athens ,Greece,20-22 June ,2007.
7. Giannakos K, Tsoukantas S., *'Ballasted and Unballasted Tracks-Need for Fastenings with soft pads '*, International Railway Symposium, Ankara-Turkey, 14-16 December ,2006.
8. Man A.P. de, *'DYNATRACK: A Survey of Dynamic Railway Track Properties and their Quality'*, PhD Thesis, T.U. Delft, The Netherlands, 2002.
9. Knothe Kl., Grassie S.L., *'Modelling of Railway Track and Vehicle / Track Interaction at High Frequencies'*, Vehicle System Dynamics, Vol. 22, 1993, pp. 209-262.
10. Fastenrath F., *'Die Eisenbahnschiene', Chapt. 2: J. Eisenmann: 'Die Schiene als Trager und Fahrbahn'*, Verlag W. Ernst, e.a., Berlin, 1977.
11. Prud' Homme A., Erieau J., *'Les Nouvelles Traverses en Bıton de la SNCF'*, RGCF, No. 2, 1976, pp. 102-117.
12. SNCF, Direction de l'Equipement, *'Mıcanique de la Voie'*, Paris, Octobre 1981.
13. Thompson D. J., *'The Effects of Local Preload on the Foundation Stiffness and Vertical Vibration of Railway Track'*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 219(5), 1999, pp. 881-904.
14. Sato Y., Morimura T., Watanabe S., *'Theoretical Analyses and Experimental Results on Track Moduli with Use of Wheelset Drop Test'*, Vehicle System Dynamics, Supplement to Vol. 24, 1995, pp.164-179.
15. Man A.P. de, Rasmussen S., *'The High Speed Deflectograph and the Hammer Excitation Test: Two Measurement Techniques for Determining Track Performance'*, Rail Engineering International Edition, No. 1, 2000, pp. 13-18.
16. Grassie S.L., Gregory R.W., Harrison D., Johnson K.L., *'The Dynamic Response of Railway Track to High Frequency Vertical Excitation'*, Journal of Mechanical Engineering Science, Inst. of Mech. Eng., Vol. 24, No. 2, 1982, pp. 77-90.
17. UIC, Code 864-5 *'Technical Specification for the Supply of Rail Seat Pads'*, 4th edition, 1986.
18. Grassie S.L., *'Resilient Railpads: Their dynamic behaviour in the laboratory and on track'*, Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol. 203, 1989, pp.25-32.

**Νικόλαος Δεμιρίδης**
Δρ Πολιτικός Μηχανικός ΑΠΘ – Συγκοινωνιολόγος ΕΝΡΟ, Κασσαβέτη 123, 38 221 Βόλος
**Χρίστος Πυργίδης**
Αναπληρωτής Καθηγητής ΑΠΘ, Τομέας Μεταφορών, Συγκοινωνιακής Υποδομής, Διαχείρισης Έργων και Ανάπτυξης, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, 54 124 Θεσσαλονίκη

*Extended Summary*

# Analytical Method for Determining the Maximum Wheel Load

**NIKOLAOS DEMIRIDIS**
Civil Engineer AUTh, PhD
Transportation Engineer ENPC, DEA, MS

**CHRISTOS PYRGIDIS**
Associate Professor AUTh

*Abstract*
*In this paper, a method is presented for determining the maximum wheel load acting on a ballasted railway track, via a fully analytical calculation of the contribution of the vehicle's unsprung masses. In this respect, mathematical models modeling the rolling stock - railway track interaction in the mid to high frequencies are applied, taking into consideration the geometric, dynamic and construction characteristics of the railway track, as well as the wheel - rail contact interface parameters. The proposed method may be used primarily, as proposed, in the design process of rails, as well as other elements of a ballasted railway track provided that the necessary refinements are made.*

## 1. INTRODUCTION

In this paper, a method is presented for calculating the maximum wheel load acting on a ballasted railway track. The term 'maximum wheel load' refers here to the characteristic value of the vertical wheel load applied to the railway track, which covers the maximum, theoretically, vertical wheel load exceedence probability, during the railway track's lifetime. The said probability allows for the consideration of extreme, non-usual loading conditions of the railway track, such as the ones mentioned in [1]. Given the random character of the railway track's loading mechanism [2], the probability of extreme, non-usual wheel loads corresponds in general to values of the order of $10^{-6}$ (i.e. one in a 1,000,000) [3], that is, in case of a normal (Gaussian) distribution, to the safety level expressed by five times the standard deviation of the random variable (i.e. the vertical wheel load applied to the railway track) from its mean value.

The maximum wheel load value is indeed of interest in the design process of rails [3]; however, the proposed method for determining the vertical wheel load (incl. static, semi-static and dynamic components) described herein may be used in the design and dimensioning process of other components or layers of a ballasted railway track (e.g. the sleepers, the ballast, etc.). In such a case, however, the respective probabilistic safety level applying to every single constituting component or layer of the railway track will have to be considered on a case by case basis. This safety level decreases from the top to the bottom of the railway track (i.e. from the rails to the subgrade), given the reduction in forces and stresses from layer to layer [4] (for example, while for rails the safety level that can be employed usually corresponds to five times the standard deviation of the vertical wheel load from its mean value [3], for sleepers and the ballast this corresponds to three and two times this value, respectively [1]).

Herein, a new theoretical method for calculating the maximum wheel load is presented, based on a fully analytical calculation of the contribution of the vehicle's unsprung masses to the vertical wheel load. The proposed method is an extension to the vertical wheel load calculation method via semi-analytical calculation of the contribution of the vehicle's unsprung masses [1,5,6,7].

The paper is structured in four parts. In the first part, the vertical loading mechanism of the railway track and the existing methods for the calculation of the vertical wheel load and the maximum wheel load are presented. In the second part, the proposed calculation method is detailed. In the third part, a numerical application of the proposed method is presented. Lastly, in the fourth part of the paper conclusions are given.

The research contributes to proposing a new theoretical method for calculating the maximum wheel load acting on a ballasted railway track, which may be used, as proposed, in the design process of rails, as well as other elements of a ballasted railway track provided that necessary refinement is carried out.

*Submitted: Sep. 18, 2006 Accepted: July 1, 2008*

## 2. SYMBOLS AND TERMINOLOGY

| | |
|---|---|
| $A$ | Constant that characterizes the quality of the running surface of rails with regards to roughness |
| $A_r$ | Cross sectional area of rails ($m^2$) |
| $c_t$ | Track damping (N/m/s) |
| $c_b$ | Ballast damping (N/m/s) |
| $c_p$ | Rail pad damping (N/m/s) |
| $d_r$ | Rail steel density ($kg/m^3$) |
| $E_r$ | Rail modulus of elasticity ($N/m^2$) |
| $f$ | Frequency (Hz) |
| $f_t$ | Track resonant frequency (Hz) |
| $F_{nc}$ | Non-compensated centrifugal force (N) |
| $g$ | Gravity constant ($9.81 m/s^2$) |
| $h_{KB}$ | Distance from the vehicle's center of gravity to the TOR (m) |
| $H_{yC}$ | Contact receptance (m/N) |
| $H_{yH}$ | Hertzian spring receptance (m/N) |
| $H_{yr}$ | Track receptance (m/N) |
| $H_{yW}$ | Wheel receptance (m/N) |
| $I_r$ | Rail moment of inertia ($m^4$) |
| $k_1$ | Constant that characterizes the quality of the running surface of rails with regards to roughness |
| $k_H$ | Hertzian spring stiffness (N/m) |
| $k_t$ | Track dynamic stiffness (N/m) |
| $k_b$ | Ballast dynamic stiffness (N/m) |
| $k_p$ | Rail pad dynamic stiffness (N/m) |
| $\lambda$ | Wave length (m) |
| $l_s$ | Rail support spacing (m) |
| $m_W$ | Wheel unsprung mass (kg) |
| $M_s$ | Sleeper mass (kg) |
| $n$ | Coefficient to account for a given probabilistic safety level for calculating the r.m.s. of the Standard Deviations of the vehicle induced dynamic loads |
| $v_r$ | Rail steel Poisson ratio |
| $N_L$ | Mean Standard Deviation of Level (mm) |
| $Q$ | Axle load (N) |
| $Q_{max}$ | Maximum wheel load (N) |
| $Q_{dyn}$ | Dynamic wheel load (N) |
| $Q_{dyn,um}$ | Unsprung mass dynamic load (N) |
| $Q_{dyn,ssm}$ | Sprung & semi-sprung mass dynamic load (N) |
| $Q_j$ | Vertical wheel load (N) |
| $Q_{nc}$ | Vertical quasi-static wheel load due to the non-compensated centrifugal force (N) |
| $Q_o$ | Static wheel load (N) |
| $\rho_t$ | Track spring constant (N/m) |
| $R$ | Horizontal curve radius (m) |
| $R_W$ | Wheel radius (m) |
| $R_{rW}$ | Equivalent wheel – rail radius (m) |
| $\sigma(Q_{dyn,um})$ | Standard Deviation of the unsprung mass dynamic loads (N) |
| $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ | Standard Deviation of the sprung & semi-sprung mass dynamic loads (N) |
| $S_r$ | Power spectral density of rail roughness ($m^3$) |
| $S_{Qdyn,um}$ | Power spectral density of unsprung masses dynamic loads ($N^2/Hz$) |
| $U$ | Cant (mm) |
| $V$ | Speed (km/h) |
| $y$ | Elastic rail vertical displacement (m) |
| $y_g$ | Vertical rail running surface deformation (m) |
| $y_H$ | Elastic vertical displacement of the Hertzian spring (m) |
| $y_W$ | Elastic vertical displacement of the unsprung mass (m) |
| $\omega$ | Circular frequency (rad/s) |
| $\Omega$ | Spatial circular frequency (rad/m) |

## 3. VERTICAL LOADING OF THE RAILWAY TRACK – MAXIMUM WHEEL LOAD CALCULATION

### 3.1 Vertical loading mechanism

The vertical load $Q_j$ applied by the wheel of a railway axle, with j=1,2,.., on the railway track, is given by the relationship (3.1).

The dynamic loads $Q_{dyn}$ applied to the railway track due to the interaction with the rolling stock have a random character. Assuming linearity, they can then be treated separately in distinct frequency bands.

More particularly, in the low frequency range (0-40Hz), focus is placed on the interaction between, on the one hand, all the inertial and elastic vehicle components, i.e. the unsprung (axles), the semi-sprung (bogies) and the sprung (car body) masses as well as the vehicle's primary & secondary suspension, and on the other hand, the railway track [4,8,9].

Respectively, in the mid to high frequency range (40-400Hz & 400-2000Hz), the interaction between the vehicle's unsprung masses (axles) and the railway track [4,8,9] is the one of more interest.

### 3.2 Existing methods for calculating the Maximum Wheel Load

The probabilistic approach adopted for the calculation of the maximum wheel load is generally based on the increment of the mean value of the vertical wheel load $Q_i$, in such a way that the desired statistical level of safety is achieved (see § 1). The following calculation methods may be distinguished (used, however, for defining the loads acting on railway sleepers and not rails):

- The method suggested by German researchers [10];

- The method suggested by French researchers [11];
- The method proposed by Greek scientists, an extension of which has been proposed and applied in the Greek railway network [2,6,7];

Given that only the second method takes into consideration in a distinct and clear manner the contribution of the vehicle's unsprung and semi-sprung / sprung masses to the overall vertical wheel load acting on the railway track, the first method is not further presented here. According to the second method above, the maximum wheel load $Q_{max}$ is given by relationship (3.2)[1].

The standard deviation of the dynamic loads of the vehicle's sprung and semi-sprung masses $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ is calculated on the basis of relationship (3.3) [12].

Similarly, the standard deviation of the dynamic loads of the vehicle's unsprung masses $\sigma(Q_{dyn,um})$ is calculated using relationship (3.4) [1]. The relationship (3.4) is semi-analytical. It starts by modeling the railway track as an infinite Euler beam (Fig. 1); it is further adapted to account for the results of actual in-situ measurements [1]. The dynamic track stiffness $k_t$ in relationship (3.4) is calculated using relationships (3.5) and (3.6) [1]. The values of static stiffness $\rho_t$ used in relationship (3.6) take into account all kinds of preload applied to the railway track [1,13], thus increasing the validity of the $\rho_t$ value employed in the calculation of $k_t$ in relationship (3.5).

# 4. PROPOSED METHOD FOR MAXIMUM WHEEL LOAD CALCULATION

## 4.1 Theoretical background

The proposed method is an extension to the calculation method already described (§ 3.2). It is based on the fully analytical calculation of the dynamic loads induced by the vehicle's unsprung masses $Q_{dyn,um}$ and their contribution to the vertical wheel load acting on the railway track. Therefore, the formulas employed for the calculation of the maximum wheel load $Q_{max}$ as per the proposed method are the same as for the method in § 3.2, with the exception of formula (3.4) and what follows this latter.

More particularly, for calculating $\sigma(Q_{dyn,um})$ the mathematical model of rolling stock - railway track interaction of Fig. 2 is applied. This allows for the estimation and further use in what follows of the contact receptance function $H_{yC}$ [8,9]. Successful use of this model has been reported elsewhere [4,8,14] for applications other than the one described herein.

The standard deviation of the dynamic loads induced by the vehicle's unsprung masses $\sigma(Q_{dyn,um})$ is calculated following relationship (4.1) in the frequency range of interest (40-2000Hz). The power spectral density of the unsprung masses' dynamic loads $S_{Qdyn,um}$ in relationship (4.1) is calculated as per relationship (4.2).

In accordance with the mechanical model of Fig. 2, the contact receptance function $H_{yC}$ is calculated by relationship (4.3) in combination with (4.4) and (4.5). The Hertzian spring stiffness is given by relationship (4.6).

For the calculation of $S_{Qdyn,um}$ in relationship (4.2), a standardized rail roughness design spectrum $S_r$, defined by relationship (4.7) [14], is taken into consideration.

The track receptance function $H_{yr}$ [15] in relationship (4.3) depends upon the constructional, geometric and dynamic characteristics of the railway track [8]. To calculate it, the modeling of the railway track by means of an appropriate mechanical model is necessary. For reasons of simplicity and standardization in the calculation process, of $Q_{max}$, analytical models are proposed and applied herein, see Tab. 1 [9,16].

## 4.2 Similarities and differences with the existing methods

The similarities between the proposed calculation method for the track's maximum wheel load $Q_{max}$ and the method described in § 3.2 relate to the following:

- Calculation of the maximum wheel load $Q_{max}$ according to relationship (3.2) in both cases.
- Calculation of the standard deviation of the vehicle's sprung and semi sprung masses' dynamic loads $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ in relationship (3.2) according to (3.3) in both cases.

The differences between the two approaches are as follows:

- Simulation of the railway track (ballasted) with an infinite length Timoshenko beam with one or two elastic layers (in the last case with suspended masses) (see Tab. 1) instead of an infinite Euler beam on a continuous single elastic layer (Fig. 1). Based on what was already mentioned in § 4.1, a better simulation of the railway track's behavior in the mid and high frequency range is thus achieved, since:
  - The consideration of the shearing and rotary inertia of the Timoshenko against the Euler beam tend to make the beam more flexible, especially in the high frequency range (above 400Hz), which is in accordance with the results of field measurements [16].
  - The consideration of two elastic layers and of the sleepers in a discrete manner compared to a single elastic layer (without suspended masses) gives the possibility of a more realistic modeling of the railway track, which can provide additional information about the rail resonance and sleepers' anti-resonance

[1] For the maximum wheel load as defined in § 1, n = 5.00 in relationship (3.2).

further to the full track resonance [8,9,14].

- Consideration in the unsprung masses – track system (Fig. 2) of an additional elastic element, namely the Hertzian contact spring stiffness, compared to the mechanical model in § 3.2. The Hertzian spring stiffness rules the overall stiffness of the mechanical system mentioned above, as described by the contact receptance function $H_{yC}$, in the high frequency range mainly (above 1000Hz) [4,8]. It is thus an additional element that has to be considered in the simulation, since in theory it contributes significantly to precision, especially above 1000Hz, that is, over more than half of the frequency range of interest (40-2000Hz) where the contribution of the vehicle's unsprung masses to the total vertical wheel load (maximum wheel load) is of importance. Additionally, it allows, in theory, accounting for the rolling stock's characteristics – relationship (4.6).
- The track stiffness parameters taken into account in the analytical models in Tab. 1 (proposed method) are the real dynamic stiffness values, drawn from experiments and in the field measurements; that is, no use of relationship (3.5) and the track's static stiffness values (as calculated by means of the method described in [17]) is made to calculate the dynamic stiffness values (as in the Fig. 1 model – relationship (3.4) of the method in § 3.2), thus limiting potential influences on the calculations.

The differences described above between the proposed method for calculating the maximum wheel load $Q_{max}$ and the method described in §3.2, do not allow any direct comparison between them, since the method in § 3.2 is semi-analytic (i.e. it is based on an analytical model, further improved by adjusting relationships on the basis of actual experimental data), this latter only, making the assessment of any potential impact for adjusting relationship (3.4) in § 3.2 to achieve comparison with the proposed method significantly hard.

## 5. NUMERICAL APPLICATION

The numerical application only applies to the proposed method. For this purpose, both track models in Tab. 1 were used and their results compared.

### 5.1 Input data

For the numerical application, a ballasted railway track with UIC 54 rails and mono bloc concrete sleepers was considered. The stiffness and damping values of the track layers were considered to vary within a 'logical' value range, based on the bibliography [8,9] (Tab. 2). Based on this, a parametric study was performed.

The rolling stock data are presented in Tab. 3.

### 5.2 Calculation process

All calculations were performed in MATLAB®. From the input data, the standard deviation of the dynamic loads of the vehicle's unsprung masses was calculated – see relationship (4.1). It should be noted that:

- The railway track was modeled as a single Euler beam resting on a continuous elastic support (Model 1 in Tab. 1) and as a Timoshenko beam with suspended masses (Model 2 in Tab. 1) respectively.
- In order that the results of both models might be compared, the track's dynamic stiffness $k_t$ was calculated by means of relationship (5.1) [8].

After calculating $\sigma(Q_{dyn,um})$, the standard deviation of the vehicle's sprung / semi-sprung masses dynamic loads was estimated following relationship (3.3).

For the values of $\sigma(Q_{dyn,um})$ and $\sigma(Q_{dyn,ssm})$ thus defined, the maximum wheel load $Q_{max}$ was calculated following relationship (3.2).

### 5.3 Results

#### Investigation of relationship (5.1)

The purpose of the investigation was the definition of the correspondence between the Euler beam mechanical model of the railway track (Model 1 in Tab. 1) and the Timoshenko beam (with suspended masses) model (Model 2 in Tab. 1), as concerns the dynamic stiffness values of the elastic layers taken into account in each case ($k_t$ in the case of Model 1 and $k_b$, $k_p$ in the case of Model 2). The problem relates to the choice of the value of dynamic stiffness $k_t$ that has to be taken into account for the single elastic layer of the Euler beam model, in such a way as to allow for the comparison of the results of both track models on the basis of the same input data.

In this respect, the resonance frequency of the railway track $f_t$ was calculated on the basis of Model 2 in Tab. 1 via the track receptance function $H_{yr}$. From the value of $f_t$, the estimated $k_t$ (Model 1) value was calculated on the basis of (5.1), which corresponds to specific values of $k_b$ and $k_p$ (Model 2). The following cases were examined:

- Case A: $k_p$ variable –$c_p$, $k_b$, $c_b$ constant (2 sub-cases 'hard' and 'soft' substructure).
- Case B: $k_b$ variable –$k_p$, $c_p$, $c_b$ constant.

The results are presented in Tab. 4 and 5, respectively. The following may be pointed out:

- Case A – Sub-case 'soft' substructure: The value of $k_t$ (Model 1), as calculated by relationship (5.1), corresponds well (difference < ~ -3.5%), except in the extreme case of very 'soft' rail pad ($k_p$= 20-40MN/m), to the real value of the ballast dynamic stiffness $k_b$. This

difference increases as the rail pad becomes 'stiffer' and especially for $k_p > k_b$.

- Case A – Sub-case 'hard' substructure: The value of $k_t$ (Model 1), as calculated by relationship (5.1), corresponds well (difference of the order of ~ -1.5% or even less) to the real value of the ballast dynamic stiffness $k_b$ for $k_p > k_b$. For $k_p < k_b$, the rail pad stiffness value plays a major role in the overall track stiffness ($k_t$), this being more important than in the case of 'soft' substructure, resulting in a $k_b$ value far away from the $k_t$ value as calculated by relationship (5.1).
- Case A – Both sub-cases 'hard' and 'soft' substructure: The stabilization of $f_t$ values above a certain $k_p$ value, which evidently depends on the relative value of $k_b$, is to be expected and is in accordance with the results in [18].
- Case B: The value of $k_t$ (Model 1), as calculated by relationship (5.1), varies (deviation of the order of less than -5%) around the real value of the ballast dynamic stiffness value $k_b$.

The results in Tab. 4 and 5 testify to the expected difficulty in successfully replacing a model with more degrees of freedom (Model 2 in Tab. 1) by a simpler mathematical model (Model 1 in Tab. 1).

Despite the fact that in some cases, as shown above, it is possible to consider that $k_t = k_b$ in order to successfully correlate the two track models, relationship (5.1) shall be always applied in what follows.

**Comparison of the results of the two track models**

The comparison took place for the following cases:

- Tab. 6: $k_b$, $c_b$ constant (two types of substructure 'soft', 'hard'), $k_p$ variable ($c_p$ constant).
- Tab. 7: $k_p$, $c_p$ constant, $k_b$ variable ($c_b$ constant).

Initially, as mentioned in § 5.2, the standard deviation of the dynamic loads induced by the vehicle's unsprung masses $\sigma(Q_{dyn,um})$ was calculated. The results for $\sigma(Q_{dyn,um})$ are presented in Tab. 8 for Case A (Tab. 6) and in Tab. 9 for Case B (Tab. 7).

The maximum wheel load $Q_{max}$ was then calculated, as mentioned in § 5.2. The results are presented in Tab. 10 and 11 (Case A – Tab. 8 and B – Tab. 9 respectively). It is mentioned that:

- $\sigma(Q_{dyn,ssm}) = 0.16Q_o = 1.6$t or 15.696kN from relationship (3.4) ($g = 9.81 m/s^2$).
- $Q_{nc} = 12.526$kN.

**Commenting on the results**

From the results in Tab. 8, and especially in the case of 'soft' substructure (Sub-case A.1), the differences in the values of $\sigma(Q_{dyn,um})$ between the two models are of the order of 40% and more. This extreme value appears in the case of 'very soft' rail pad ($k_p \leq 20$MN/m), where Model 1 in Tab. 1 provides considerably higher values than Model 2. This difference reduces as the rail pad stiffness increases and its sign is reversed at relatively high values of rail pad stiffness (estimated around 320MN/m).

Respectively, in the case of 'hard' substructure (Sub-case A.2 – Tab. 8), the results of the two methods for the $\sigma(Q_{dyn,um})$ values differ by as much as 65%. In this case also, as before, the said extreme value appears in the case of a 'very soft' rail pad ($k_p \leq 20$MN/m), where Model 1 in Tab. 1 gives considerably higher values compared to Model 2. The difference between the two reduces as the rail pad stiffness increases and its sign is reversed around 80MN/m.

From the results in Tab. 9, differences in the values of $\sigma(Q_{dyn,um})$ of the order of ~10% between the two track models are demonstrated, Model 2 giving higher values compared to Model 1 in Tab. 1 for higher rail pad stiffness values. This difference reduces with rail pad stiffness and its sign is reversed around 80MN/m (value for $k_b$).

The differences mentioned may be mainly attributed on the one hand to the fact that relationship (5.1) is approximate and not totally precise, and on the other hand to the fact that the Model 1 in Tab. 1 does not simulate successfully (compared to reality) the $H_{yr}$ function, but only in the cases mentioned in Tab. 1 and proven by the calculations herein ('hard' rail pad cases). In all other cases, Model 1 in Tab. 1 tends to underestimate the $H_{yr}$ function. This means a 'harder' track than in reality and therefore higher values of the vehicle's unsprung masses' dynamic loads $Q_{dyn,um}$, expressed by means of the standard deviation $\sigma(Q_{dyn,um})$.

The differences when calculating $\sigma(Q_{dyn,um})$ become less noticeable in case of the maximum wheel load $Q_{max}$ due to the square root in relationship (3.2). The differences in the case of 'soft' substructure (Sub-case A.1 – Tab. 10) lie between -15/+3%, in the case of 'hard' substructure (Sub-case A.2 – Tab. 10) between -23/+5%, while in the Case B (Tab. 11) they are around -2/+6%.

## 6. CONCLUSIONS

In this paper the existing methods for calculating the maximum wheel load were investigated and a new theoretical method was presented. The proposed method is based on a fully analytical calculation of the contribution of the vehicle's unsprung masses to the vertical wheel load acting on a ballasted railway track. It may be used, as proposed, in the design process of rails, as well as other elements of a ballasted railway track provided that the necessary refinement is carried out.

Within this paper, it was not possible to compare the results of the proposed method with any of the existing methods allowing for the calculation of the vertical wheel

load and the maximum wheel load. In this respect, it is considered as of importance, in the future, to make a comparison with other methods and a validation of the results herein by on-site measurements.

**Nikolaos Demiridis**
Civil Engineer PhD A.U.Th., Transportation Eng. ENPC, 123, Kassaveti str., 38 221 Volos, Greece
**Christos Pyrgidis**
Associate Professor, Civil Engineering Dpt., Aristotle university of Thessaloniki (A.U.Th.), 54 124, Thessaloniki, Greece