

Άξονας Βέλτιστης Στρέψης και Ακτίνες Δυστρεψίας στα Πολυώροφα Κτίρια

Τ. ΜΑΚΑΡΙΟΣ

Δρ Πολιτικός Μηχανικός, Λέκτορας με Π.Δ. 407/80 Π.Θ.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αναφέρεται αφ' ενός στις χαρακτηριστικές ιδιότητες του άξονα βέλτιστης στρέψης και αφ' ετέρου στον ορισμό των ακτίνων δυστρεψίας στα πολυώροφα μικτά συστήματα. Ο άξονας βέλτιστης στρέψης θεμελιώνεται με τη θεωρία των συνεχών συστημάτων, ενώ τα συμπεράσματα που προκύπτουν επαληθεύονται και από το διακριτό μοντέλο. Γίνεται μια τεκμηριωμένη και υποδειγματική παρουσίαση της απλοποιημένης μεθόδου αντισεισμικού υπολογισμού με χρήση του άξονα βέλτιστης στρέψης και των "ισοδύναμων" στατικών εκκεντροτήτων μέσα από ένα αριθμητικό παράδειγμα, ενώ τα αποτελέσματά της συγκρίνονται με τα αντίστοιχα της δύναμικής φασματικής μεθόδου. Ορίζεται για πρώτη φορά η ακτίνα δυστρεψίας στα πολυώροφα κτίρια και παρουσιάζονται κατάλληλα κριτήρια ευστρεψίας για τη διάγνωση των εύστρεπτων ορόφων σε αυτά κατά τη στατική και δυναμική διέγερσή τους.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι μετασεισμικές παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι ένα υψηλό ποσοστό βλαβών ή και καταρρεύσεων εμφανίζεται σε κτίρια με ασύμμετρη διάταξη, σε κάτοψη, των κατακόρυφων στοιχείων δυσκαμψίας. Το γεγονός αυτό αποδίδεται κυρίως στις στρεπτομεταφορικές ταλαντώσεις των διαφραγμάτων του κτιρίου, λόγω των οποίων προκύπτουν **πρόσθετες απαιτήσεις πλαστιμότητας** στα περιμετρικά στοιχεία, σε σχέση με εκείνες του αντίστοιχου συμμετρικού συστήματος υπό μεταφορική ταλάντωση. Η αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, μέσα στο πλαίσιο των απλοποιημένων μεθόδων αντισεισμικού υπολογισμού, γίνεται με τη χρήση των "ισοδύναμων" στατικών εκκεντροτήτων για τον ορισμό του σημείου εφαρμογής των στατικών σεισμικών δυνάμεων εκατέρωθεν του κέντρου μάξας Μ των ορόφων. Με την έκκεντρη δράση των στατικών σεισμικών δυνάμεων επιδιώκεται η κατάλληλη αύξηση της αντοχής των περιμετρικών στοιχείων, ώστε οι απαιτήσεις πλαστιμότητας να περιορισθούν στα επίπεδα του παραπάνω αντίστοιχου συμμετρικού συστήματος. Ανελαστικοί υπολογισμοί σε χωρικά ασύμμετρα μονώροφα συστήματα επαλήθευσαν τα παραπάνω [1]. Σε επίπεδο αντισεισμικών κανονισμών χρησιμοποιείται, εκτός από τις "ισοδύναμες"

στατικές εκκεντρότητες, και η τυχηματική εκκεντρότητα, η οποία μεταφέρει το σημείο εφαρμογής των σεισμικών δυνάμεων ακόμα πιο έκκεντρα από το M.

Η ορθολογική, όμως, εφαρμογή της απλοποιημένης μεθόδου (ισοδύναμης στατικής) σε όλα τα κανονικά καθ' ύψος πολυώροφα κτίρια προϋποθέτει την ύπαρξη κάποιων προϋποθέσεων, οι κυριότερες των οποίων συνοψίζονται στα εξής:

- Το σύστημα πρέπει να διαθέτει πραγματικό κατακόρυφο ελαστικό άξονα III καθώς και δύο οριζόντιους άξονες ελαστικότητας I και II. Μετά τον ορισμό των υπόψη ελαστικών αξόνων, όπως γνωρίζουμε από τη μελέτη του μονωρόφου, πρέπει οι οριζόντιες στατικές σεισμικές δυνάμεις να προσανατολιστούν κατά τη διεύθυνση των I και II, εξ ου και η χρήση της ασύζευκτης μεταφορικής ιδιοπειρόδου για τον υπολογισμό των σεισμικών δυνάμεων. Σημειώνεται ότι, επειδή τα πολυώροφα συστήματα δεν διαθέτουν γενικά ελαστικούς άξονες, οι αντισεισμικοί κανονισμοί αντιμετωπίζουν το υπόψη πρόβλημα είτε ημιεπιτρικά - διάσπαση σε μονώροφα συστήματα, χρήση των "κέντρων βάρους" των ροπών αδρανειών των τοιχωμάτων, χρήση των κέντρων δυσκαμψίας των ορόφων (π.χ. EC8/98, N.B.C.Canada-95) - είτε με πλήρη αποφυγή του υπολογισμού της θέσης του ελαστικού άξονα (π.χ. NEAK-95, SEAOC) με όλες τις συνέπειες που αυτό συνεπάγεται.
- Απαιτείται η αυξομείωση της εκκεντρότητας σχεδιασμού με τη χρήση των "ισοδύναμων" στατικών εκκεντροτήτων, με τελικό προϊόν την κατάλληλη αύξηση της αντοχής των περιμετρικών στοιχείων, ώστε να αντιμετωπισθούν ορθολογικά οι δυσμενείς επιπτώσεις από τις στρεπτομεταφορικές ταλαντώσεις των ορόφων. Όμως οι "ισοδύναμες" στατικές εκκεντρότητες είναι συνάρτηση τόσο της στατικής εκκεντρότητας όσο και της ακτίνας δυστρεψίας του συστήματος [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Άλλα μεγέθη, όπως η στατική εκκεντρότητα, ο προσανατολισμός των κύριων αξόνων ελαστικότητας και οι ακτίνες

δυνατότητας του συστήματος, ορίζονται μόνο στα μονώροφα και σε ειδικές κατηγορίες των πολυώροφων κτιρίων, με συνέπεια να μην είναι δυνατή η ορθολογική εφαρμογή της ισοδύναμης στατικής μεθόδου σε κάθε πολυώροφο σύστημα [10], [11], [12], [13]. Το 1986 οι Cheung, W.T., Tso, W.K. [14] και το 1987 οι Hezal, R., Chopra, A.K. [11] με χρήση του διακριτού μοντέλου απέδειξαν ότι δεν είναι δυνατό να ορισθούν τα κέντρα δυσκαμψίας των ορόφων που να εξαρτώνται αμιγώς από τα ελαστικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής. Από το 1985 και 1987 ο Anastassiadis, K. [15], [16] χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συνεχών συστημάτων εξήγησε και τους λόγους, για τους οποίους δεν είναι δυνατός ο ορισμός του κατακόρυφου πραγματικού ελαστικού άξονα στα μικτά πολυώροφα συστήματα.

Από την άλλη πλευρά, οι μετασεισμικές εμπειρίες από ισχυρές σεισμικές δονήσεις δεν πιστοποιούν δυσμενή σεισμική συμπεριφορά των κτιρίων λόγω ανυπαρξίας του πραγματικού ελαστικού άξονα. Κατά συνέπεια, μπορεί μεν στα κτίρια αυτά να μην είναι δυνατή η ορθολογική εφαρμογή της απλοποιημένης μεθόδου, όμως θα είναι ασφαλώς δυνατή μια ελαστικότερη αλλά τεκμηριωμένη εφαρμογή τής υπόψη μεθόδου, η οποία και θα περιβάλλει πάντοτε τη δυναμική απόκριση του συστήματος.

Για την τεκμηριωμένη εφαρμογή της απλοποιημένης μεθόδου αντισεισμικού υπολογισμού χρειάζεται να ορισθεί ο κατακόρυφος ελαστικός άξονας βέλτιστης στρέψης του τυχόντος πολυώροφου συστήματος, γνωστότερος και ως πλασματικός ελαστικός άξονας [12], [13], [17]. Οταν τοποθετείται το φορτιστικό επίπεδο των ορίζοντίων στατικών δυνάμεων πάνω στον άξονα βέλτιστης στρέψης, τότε η στρέψη ολοκλήρου του συστήματος **ελαχιστοποιείται**, ενώ **μηδενίζεται**, στην οριακή περίπτωση που ο υπόψη άξονας αποτελεί πραγματικό ελαστικό άξονα του συστήματος. Στην κατάσταση της βέλτιστης στρέψης οι στροφές των ορόφων του συστήματος είναι κατά πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες που προκύπτουν από άλλες θέσεις του φορτιστικού επιπέδου και γι' αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε προσεγγιστικά ότι το πολυώροφο κτίριο μεταφέρεται παράλληλα προς τον εαυτόν του με αμελητέα στροφή. Στη συνέχεια, ορίζονται οι κύριες διευθύνσεις του συστήματος καθώς και οι ακτίνες δυνατότητας της στρέψης του. Ύστερα από τα παραπάνω θεωρούμε ότι ο άξονας βέλτιστης στρέψης, ο οποίος ορίζεται πάντοτε σε όλα τα πολυώροφα κτίρια που διαθέτουν απλώς την απαιτούμενη από τους κανονισμούς κανονικότητα καθ' ύψος, μπορεί να παίξει τον ίδιο ρόλο με τον κατακόρυφο ελαστικό άξονα στην εφαρμογή των απλοποιημένων μεθόδων αντισεισμικού υπολογισμού.

Η διερεύνηση των ιδιοτήτων του κατακόρυφου άξονα βέλτιστης στρέψης στα πολυώροφα κτίρια, ο ορισμός των ακτίνων δυνατότητας της στρέψης αυτών, η υποδειγματική παρουσίαση βήμα προς βήμα της προτεινόμενης απλοποιημένης μεθόδου αντισεισμικού υπολογισμού και η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ισοδύναμης στατικής μεθόδου κατά NEAK-95 πρωτίστως και του δυναμικού φασματικού αντισεισμικού υπολογισμού δευτερεύοντως σε ένα εύστρεπτο ασύμμετρο πενταώροφο μικτό σύστημα αποτελούν το σκοπό του παρόντος άρθρου. Σημειώνεται, επίσης, ότι η προτεινόμενη μέθοδος αποτελεί ορθολογική βελτίωση των "ισοδύναμων" στατικών μεθόδων αντισεισμικού υπολογισμού, που προτείνουν οι αντισεισμικοί κανονισμοί για τα κανονικά καθ' ύψος κτίρια, ανεξαρτήτως βαθμού ευστρεψίας και σχετικού με αυτήν κριτηρίου κανονικότητας, και όχι η υποκατάσταση της δυναμικής φασματικής μεθόδου.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

$M=+1 \cdot F$	= διάνυσμα στρεπτικών τριγωνικής κατανομής,
P_0	= πόλος στρέψης του διαφράγματος της στάθμης $z_0 = 0.80H$ για στρεπτική φόρτιση M του συστήματος,
(X_P, Y_P)	= συντεταγμένες του ελαστικού κέντρου P_0 του κτιρίου,
e_0	= στατική εκκεντρότητα του συστήματος,
m	= μάζα ορόφου,
J	= μαζική ροπή αδράνειας ορόφου,
$r = \sqrt{J/m}$	= ακτίνα αδρανείας του διαφράγματος,
ρ_x, ρ_y	= ακτίνες δυνατότητας του κατά τις διευθύνσεις x και y στο P_0 ,
e_f, e_r	= ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες,
e_{ti}	= τυχηματική εκκεντρότητα,
u_x, u_y, θ_z	= μετακινήσεις του διαφράγματος,
$G \cdot J_{s2}, G \cdot J_{s3}$	= αστρεψίες του μικτού συστήματος ως προς τους δύο άξονες Ω_2, Ω_3 αντίστοιχα [16],
$\mu(\xi)$	= συντελεστής εκ του συνεχούς μοντέλου που δίδεται από αριθμητικούς πίνακες [16],
$r_{k,k} = \sqrt{(K_{III}/K_{II})}$	= ακτίνα δυνατότητας καμπτικού υποσυστήματος εκφρασμένη ως προς το K ,
$r_{s,s} = \sqrt{(S_{III}/S_{II})}$	= ακτίνα δυνατότητας διατιπητικού υποσυστήματος εκφρασμένη ως προς το S .

3. Ο ΑΞΟΝΑΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΣΤΡΕΨΗΣ

Ο ορισμός του άξονα βέλτιστης στρέψης, γνωστότερου και ως κατακόρυφου πλασματικού ελαστικού άξονα, μπορεί

να γίνει τόσο με τη χρήση του διακριτού μοντέλου, στην γενική περίπτωση των ασύμμετρων μικτών πολυώροφων συστημάτων, όσο και με τη χρήση του συνεχούς μοντέλου, στην περίπτωση των μονοσυμμετρικών πολυώροφων μικτών συστημάτων.

3.1. Χρήση του διακριτού μοντέλου

Είναι γνωστό ότι οι αντισεισμικοί κανονισμοί απαιτούν τέσσερις διαφορετικές αναλύσεις του συστήματος, δύο για κάθε κύρια κατεύθυνση, και στη συνέχεια διενεργούν κατάλληλες επαλληλίες επί των αποτελεσμάτων των παραπάνω αναλύσεων. Στις εργασίες [12], [13] χρησιμοποιήθηκε το διακριτό μοντέλο για την εύρεση του άξονα βέλτιστης στρέψης και αναπτύχθηκε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία υπολογισμού, η οποία συνίσταται σε τρεις προσωρινές επιλύσεις του συστήματος. Οι τρεις αυτές προσωρινές επιλύσεις μπορούν να επαλληλιστούν κατάλληλα, ώστε, δίχως να απαιτηθεί άλλη ανάλυση, να ικανοποιηθούν οι επαλληλίες σχεδιασμού που επιβάλλουν οι σύγχρονοι αντισεισμικοί κανονισμοί. Εναλλακτικά και προς αποφυγή κάποιων επαλληλιών αλλά και για την εποπτικότερη αναλυτική εύρεση κάποιων ειδικών μεγεθών, όπως για παράδειγμα οι ακτίνες δυστρεψίας του συστήματος ή οι ασύνευκτες θεμελιώδεις ιδιοπερίοδοι αυτού κατά των κύριων διευθύνσεων I και II, μπορούμε να εκτελέσουμε περισσότερες αναλύσεις, όπως λεπτομερειακά παρουσιάζεται στο αριθμητικό παράδειγμα της παραγράφου 6. Όμως, επειδή το διακριτό μοντέλο δεν διαθέτει την απαιτούμενη εποπτεία για τη φυσική κατανόηση των ιδιοτήτων του άξονα βέλτιστης στρέψης, προσφεύγουμε προσωρινά στη χρήση του συνεχούς μοντέλου. Το συνεχές μοντέλο χρησιμοποιείται στο παρόν άρθρο τόσο για τη μαθηματική επαλήθευση της θέσης του άξονα βέλτιστης στρέψης από κλειστή λύση όσο και για τη φυσική κατανόηση των ιδιοτήτων του. Όμως, για αριθμητικούς υπολογισμούς θα επιστρέψουμε στο διακριτό μοντέλο, το οποίο και υπερτερεί.

3.2. Χρήση του συνεχούς μοντέλου

Η θεωρία των συνεχών συστημάτων, αν και υστερεί ως προς το διακριτό μοντέλο σε θέματα ακρίβειας των υπολογισμών, υπερτερεί αναμφισβήτητα σε θέματα ποιοτικής κατανόησης της συμπεριφοράς των μικτών πολυώροφων συστημάτων υπό στατικών οριζοντίων δυνάμεων. Στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής το τυχόν πολυώροφο χωρικό μικτό σύστημα διασπάται σε δύο χωρικά υποσυστήματα, το καμπτικό και το διατμητικό, συνεργαζόμενα μεταξύ τους. Αν θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά διατηρούν αμετάβλητα καθ' ύψος τα

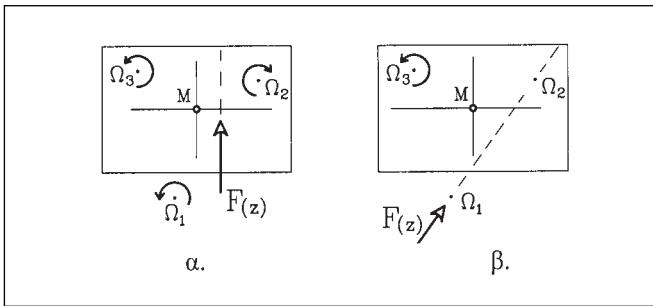
ελαστικά και γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά, τότε μπορούμε πάντοτε να ορίσουμε τα ελαστικά κέντρα K και S των δύο υποσυστημάτων καθώς και τους κύριους άξονες ελαστικότητας αυτών. Έχει αποδειχθεί [16] ότι τα υπόψη μικτά πολυώροφα συστήματα διαθέτουν πάντοτε τρεις κατακόρυφους άξονες στρέψης, τους Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , μη συνευθειακούς, ενώ η τελική απόκριση του κτιρίου, λόγω της στατικής φόρτισης F(z) συνεχούς κατανομής καθ' ύψος, προκύπτει πάντοτε ως επαλληλία των τριών εξαναγκασμένων περιστροφών του συστήματος γύρω από τους υπόψη άξονες (σχ. 1a). Επίσης, στην περίπτωση που η φόρτιση F(z) διέρχεται από τους δύο άξονες στρέψεως Ω_1 , Ω_2 , τότε το πολυώροφο σύστημα περιστρέφεται γύρω από τον τρίτο άξονα Ω_3 (σχ. 1b).

Επίσης, δείχθηκε [16] ότι, όταν υπάρχει κατακόρυφος ελαστικός άξονας στο σύστημα, αυτός προκύπτει ως μερική περίπτωση της σχετικής θέσης των αξόνων στρέψης Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 και ταυτίζεται με τον Ω_3 , ενώ οι Ω_1 , Ω_2 απομακρύνονται στο άπειρο. Πράγματι, στην ειδική περίπτωση της διπλής συμμετρίας του πολυώροφου μικτού συστήματος, οι δύο άξονες Ω_1 , Ω_2 απομακρύνονται στο y-άπειρο και x-άπειρο αντίστοιχα, ενώ ο τρίτος άξονας Ω_3 συμπίπτει με το σημείο τομής των δύο αξόνων συμμετρίας του συστήματος και τότε αποτελεί τον πραγματικό κατακόρυφο ελαστικό άξονα του συστήματος (σχ. 2a). Ταυτόχρονα, τα δύο ελαστικά κέντρα K και S των δύο υποσυστημάτων ταυτίζονται με τον άξονα Ω_3 .

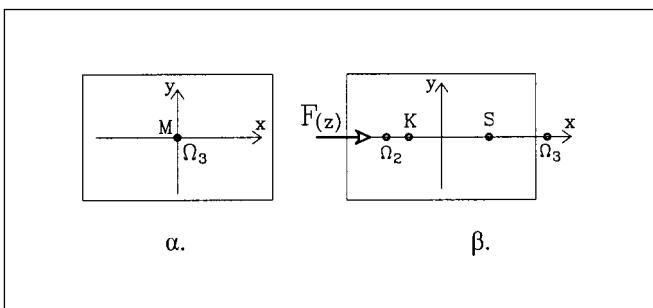
Στην ειδική περίπτωση της απλής συμμετρίας του πολυώροφου μικτού συστήματος, με άξονα συμμετρίας τον x-x, ο άξονας Ω_1 απομακρύνεται στο y-άπειρο, ενώ οι άλλοι δύο Ω_2 , Ω_3 βρίσκονται πάνω στον x-x. Στον ίδιο άξονα συμμετρίας βρίσκονται και τα δύο ελαστικά κέντρα K και S του καμπτικού και διατμητικού υποσυστήματος αντίστοιχα. Οι δύο άξονες Ω_2 , Ω_3 βρίσκονται πάντοτε εκτός του διαστήματος KS. Στην περίπτωση αυτή, αν ο φορέας της εξωτερικής φόρτισης F(z) συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας x-x, δηλαδή διέρχεται από τους πόλους Ω_2 , Ω_3 , η μικτού τύπου περιστροφή του συστήματος γύρω από τον, απομακρυσμένο στο άπειρο, άξονα Ω_1 εκφράζεται ως καθαρή μεταφορά αυτού κατά x-x (σχ. 2b).

Όταν στο υπόψη μονοσυμμετρικό σύστημα η εξωτερική φόρτιση F(z) έχει διεύθυνση κάθετη προς τον άξονα συμμετρίας του συστήματος, η συνολική απόκριση αυτού εκφράζεται ως επαλληλία των δύο εξαναγκασμένων περιστροφών μικτού τύπου γύρω από τους Ω_2 , Ω_3 .

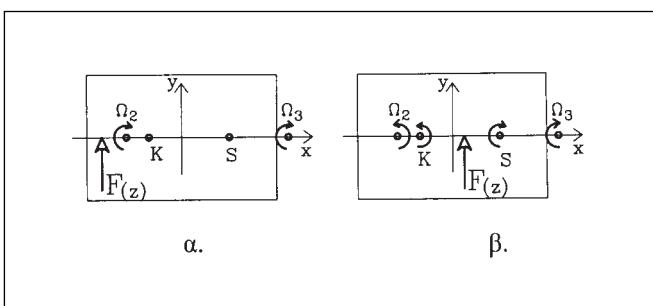
Αν η θέση της F(z) είναι εκτός του διαστήματος $\overline{\Omega_2 \Omega_3}$, τότε οι υπόψη δύο περιστροφές του συστήματος είναι συμπληρωματικές, αφού έχουν ομόσημη φορά (σχ. 3a). Άρα



Σχήμα 1: Οι άξονες στρέψης πολυώροφου συστήματος.
Figure 1: Axes of enforced torsion in a frame-wall multi-storey system.



Σχήμα 2: Άξονες στρέψεως σε συμμετρικά συστήματα.
Figure 2: Axes of enforced torsion in symmetrical system.



Σχήμα 3: Επαλληλία δύο περιστροφών.
Figure 3: Superposition of two rotation about Ω_1 , Ω_2 .

τότε είναι αδύνατος ο μηδενισμός της στροφής σε κάποια στάθμη. Αν, όμως, η θέση της $F(z)$ είναι εντός του διαστήματος $\overline{\Omega_2 \Omega_3}$, τότε οι δύο μικτού τύπου περιστροφές του συστήματος είναι ανταγωνιστικές, αφού έχουν αντίθετη φορά μεταξύ τους (σχ. 3β). Για να είναι, όμως, δυνατός ο μηδενισμός της ολικής στροφής του συστήματος σε κάποια στάθμη, πρέπει η θέση της $F(z)$ να είναι εντός του διαστή-

ματος \overline{KS} . Είναι προφανές ότι οι στάθμες, που ευρίσκονται ψηλότερα από το υπόψη σημείο μηδενισμού, θα στρέφονται αντίθετα από τις υπόλοιπες στάθμες του συστήματος. Σε ποια, όμως, στάθμη πρέπει να γίνει ο μηδενισμός της στροφής, ώστε η στρέψη ολόκληρου του συστήματος να ελαχιστοποιηθεί, δηλαδή να παρουσιαστεί η κατάσταση της βέλτιστης στρέψης; Ως καταλληλότερο κριτήριο για την ελαχιστοποίηση της στρέψης του συστήματος η επιστήμη των μαθηματικών προτείνει:

$$\int_0^H \theta^2(z) dz = \text{minimum} \quad (3.1)$$

όπου $\theta(z) =$ η συνάρτηση κατανομής των στροφών του συστήματος καθ' ύψος και $H =$ το συνολικό ύψος του συστήματος.

Κατά την εφαρμογή του διακριτού μοντέλου σε N-ώροφο σύστημα η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με την ακόλουθη [17], [12], [13]:

$$\min \theta^2 = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_N^2) / N \quad (3.2)$$

όπου ($\theta_i =$ στροφή της στάθμης i). Η σχέση (3.2) ικανοποιείται προσεγγιστικά, όταν ο μηδενισμός της στροφής γίνεται στη στάθμη $z = 0.8H$ [17], [12], [13] (σχ. 4).

Καταστρώνοντας τη συνθήκη μηδενισμού της στροφής του συστήματος στην υπόψη στάθμη, μπορεί να εντοπιστεί το σημείο εφαρμογής, στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η εξωτερική φόρτιση $F(z)$, ώστε να παρουσιασθεί η κατάσταση της βέλτιστης στρέψης.

Για τις ανάγκες του παρόντος άρθρου λαμβάνεται το κάτωθι μονοσυμμετρικό μικτό πολυώροφο σύστημα, στο οποίο θεωρούνται γνωστά τα δύο ελαστικά κέντρα K και S του καμπτικού και διατμητικού υποσυστήματος αντίστοιχα (σχ. 5). Θεωρώντας το σύστημα αναφοράς Kxyz, τοποθετούμε την εξωτερική φόρτιση δυνάμεων $F(z)$ στο σημείο P_0 που καθορίζεται από την υπό προσδιορισμό απόσταση x_0 από την αρχή K. Οι δυνάμεις $F(z)$ προκαλούν ως προς τους άξονες Ω_2 , Ω_3 τις αντίστοιχες στρεπτικές φορτίσεις $m_2(z)$, $m_3(z)$, οι οποίες ακολουθούν και αυτές την καθ' ύψος κατανομή των δυνάμεων $F(z)$:

$$m_2(z) = F(z) \cdot (-e_{x2} + x_0), \quad m_3(z) = -F(z) \cdot (e_{x3} - x_0) \quad (3.3)$$

Οι εξωτερικές στρεπτικές φορτίσεις $m_2(z)$, $m_3(z)$ προκαλούν στη βάση των δύο αξόνων Ω_2 , Ω_3 τις διρροπές B_2 , B_3 αντίστοιχα. Οι γωνίες στρέψεως $\theta_2(\xi)$, $\theta_3(\xi)$ της

στάθμης $\xi = z/H = 0.80$ γράφονται [16]:

$$\theta_2(\xi) = \frac{B_2}{G \cdot J_{s2}} \cdot (\mu_2(0) - \mu_2(\xi)) \quad (3.4\alpha)$$

$$\theta_3(\xi) = \frac{B_3}{G \cdot J_{s3}} \cdot (\mu_3(0) - \mu_3(\xi)) \quad (3.4\beta)$$

Από τη συνθήκη μηδενισμού της ολικής γωνίας στροφής του συστήματος στη συγκεκριμένη στάθμη ($\xi=0.80$) έχουμε:

$$\theta_3(\xi) + \theta_2(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0 - e_{x3}}{G \cdot J_{s3}} \cdot (\mu_3(0) - \mu_3(\xi)) + \frac{x_0 - e_{x2}}{G \cdot J_{s2}} \cdot (\mu_2(0) - \mu_2(\xi)) = 0$$

Επιλύοντας την τελευταία εξίσωση ως προς την υπό προσδιορισμό απόσταση x_0 , προκύπτει η θέση του σημείου εφαρμογής P_0 , στο οποίο πρέπει να τοποθετηθεί η εξωτερική φόρτιση $F(z)$, ώστε να παρουσιασθεί η κατάσταση της βέλτιστης στρέψης, ήτοι:

$$x_0 = r_{k,k} \cdot \frac{(1 + \varepsilon_x \cdot \tan \alpha) \cdot \Delta \mu_3 - (1 - \varepsilon_x \cdot \cot \alpha) \cdot \Delta \mu_2}{(\varepsilon_x + \cot \alpha) \cdot \Delta \mu_3 + (\tan \alpha - \varepsilon_x) \cdot \Delta \mu_2} \leq \bar{KS}$$

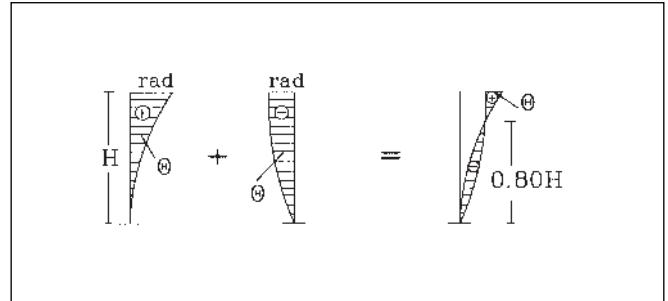
όπου:

$$\Delta \mu_2 = \mu_2(0) - \mu_2(\xi), \quad \Delta \mu_3 = \mu_3(0) - \mu_3(\xi)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\bar{KS}}{r_{k,k}}, \quad v^2 = \left(\frac{r_{s,s}}{r_{k,k}} \right)^2 + \varepsilon_x^2$$

$$e_{x2} = -r_{k,k} \cdot \cot \alpha, \quad e_{x3} = r_{k,k} \cdot \tan \alpha, \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \varepsilon_x}{1 - v^2}$$

Η θέση αυτή βρίσκεται πάντοτε μέσα στο διάστημα \bar{KS} του συστήματος. Όσο μικρότερο είναι το διάστημα \bar{KS} , τόσο η κατάσταση της βέλτιστης στρέψης πλησιάζει στην κατάσταση της μηδενικής στρέψης, η οποία και εμφανίζεται εκ ταυτότητος, στην οριακή περίπτωση που το σημείο K συμπίπτει με το S. Οταν η εξωτερική φόρτιση $F(z)$ τοποθετηθεί μέσα στο διάστημα \bar{KS} , οι στροφές των ορόφων του καμπτικού υποσυστήματος γύρω από το K έχουν αντίθετη φορά από τις στροφές των ορόφων του διατμητικού υποσυστήματος γύρω από το S. Έτσι υπάρχει στο μέγιστο δυνατό βαθμό ανταγωνιστική λειτουργία των δύο υποσυστημάτων στη στρέψη του συστήματος. Η ανταγωνιστική αυτή λειτουργία συνίσταται αφ' ενός στο διαφορετικό τύπο στρέψης (καμπτικό έναντι διατμητικού) των δύο υποσυστημάτων και αφ' ετέρου στις στροφές αντιθέτου φοράς του ενός με το



Σχήμα 4: Η κατάσταση της βέλτιστης στρέψης ως επαλληλία της στρέψης των καμπτικού και διατμητικού υποσυστήματος περί το K και S αντίστοιχα.

Figure 4: State Optimum Torsion in multi-storey frame-wall building.

άλλο (σχ. 4). Επίσης, με την αύξηση του αριθμού των ορόφων η θέση του άξονα βέλτιστης στρέψης πλησιάζει προς το ελαστικό κέντρο S του διατμητικού υποσυστήματος.

Ο άξονας βέλτιστης στρέψης, γνωστότερος και ως κατάκορυφος πλασματικός άξονας, ικανοποιεί τις κάτωθι οριακές συνθήκες [17]:

α) Η θέση του στην κάτοψη ολοένα και πλησιάζει προς το ελαστικό κέντρο K του αντίστοιχου ως προς την κάτοψη μονωρόφου, όταν από το κανονικό καθ' ύψος μικτό πολυώροφο σύστημα μειώνεται προοδευτικά ο αριθμός των τυπικών ορόφων, ενώ συμπίπτει με το K, στην οριακή περίπτωση που το πολυώροφο εκφυλίζεται σε μονώροφο.

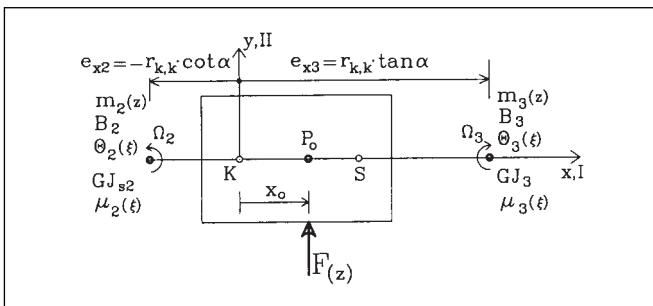
β) Η θέση του στην κάτοψη ολοένα και πλησιάζει προς το ελαστικό κέντρο K του αντίστοιχου καμπτικού υποσυστήματος με την αύξηση των τοιχωμάτων στο μικτό πολυώροφο σύστημα, ενώ συμπίπτει με το K, όταν το σύστημα μετατραπεί σε αμιγές καμπτικό (ισότροπο).

γ) Η θέση του στην κάτοψη ολοένα και πλησιάζει προς το ελαστικό κέντρο S του αντίστοιχου διατμητικού υποσυστήματος με τη διαδοχική αφάρεση των τοιχωμάτων από το μικτό πολυώροφο σύστημα, ενώ συμπίπτει με το S, όταν το κτίριο μετατραπεί σε αμιγές διατμητικό (ισότροπο).

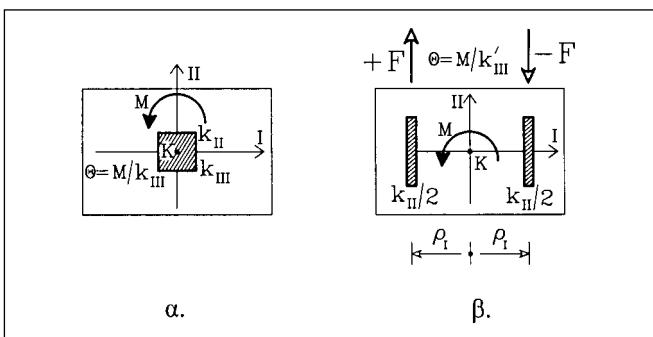
δ) Με την αύξηση του αριθμού των ορόφων, η θέση του άξονα βέλτιστης στρέψης πλησιάζει προς το ελαστικό κέντρο S του διατμητικού υποσυστήματος, διότι υπερισχύει ολοένα και εντονότερα το διατμητικό υποσύστημα έναντι του καμπτικού.

4. ΑΚΤΙΝΕΣ ΔΥΣΤΡΕΨΙΑΣ

Η έννοια της ακτίνας δυστρεψίας R προκύπτει από τη μελέτη της στρεπτικής συμπεριφοράς του μονώροφου και

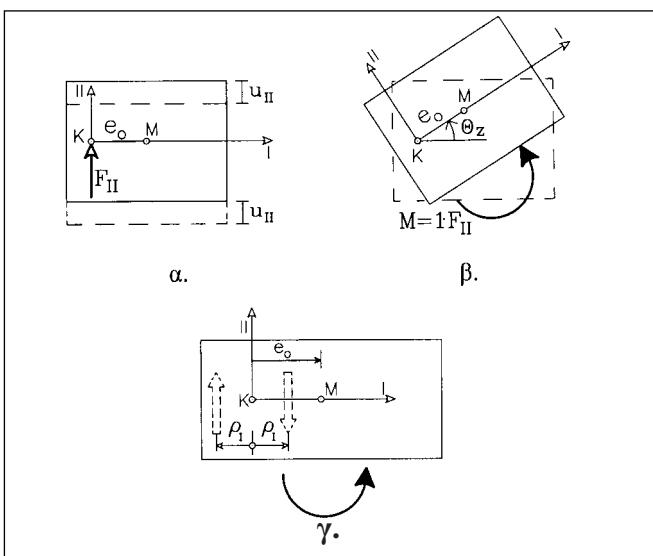


Σχήμα 5: Η θέση του άξονα βέλτιστης στρέψης.

Figure 5: The position of axis optimum torsion (P_o) in the plan.

Σχήμα 6: Ακτίνα δυστρεψίας σε μονώροφο σύστημα.

Figure 6: Torsional radius in single system.



Σχήμα 7: Υπολογισμός της ακτίνας δυστρεψίας σε μονώροφο σύστημα.

Figure 7: Computation of torsional radius in single-storey.

μονοσυμμετρικού συστήματος και μετράται επί του άξονα συμμετρίας με αρχή το K. Η ακτίνα δυστρεψίας ρ_I παριστάνει το μοχλοβραχίονα, ως προς το K, των ελαστικών δυνάμεων επαναφοράς για στρεπτική φόρτιση του συστήματος. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί αλλά ισοδύναμοι τρόποι υπολογισμού της ακτίνας δυστρεψίας.

A' τρόπος: Η ακτίνα δυστρεψίας δίδεται άμεσα από τη σχέση $\rho_I = \sqrt{k_{III}/k_{II}}$, όπου k_{III} = η στρεπτική δυσκαμψία του μονώροφου περί τον III και k_{II} = η μεταφορική δυσκαμψία αυτού κατά τον κύριο άξονα II. Πράγματι, το μονώροφο - μονοσυμμετρικό σύστημα μπορεί να υποκατασταθεί είτε με ένα υποστύλωμα στο ελαστικό κέντρο K εφοδιασμένο με μεταφορική δυσκαμψία k_{II} και δυστρεψία k_{III} (σχ. 6α) είτε με δύο τοιχώματα σε απόσταση ρ_I εκατέρωθεν του K με μεταφορική δυσκαμψία $k_{II}/2$ έκαστο (σχ. 6β). Για τυχούσα στρεπτική φόρτιση M το δεύτερο σύστημα θα εμφανίζει την ίδια γωνία στροφής θ με το πρώτο, διότι διαθέτει δυστρεψία k'_{III} ίση με k_{III} (δηλαδή με αυτήν του πρώτου συστήματος), ήτοι:

$$k'_{III} = 2 \cdot (k_{II}/2) \cdot \rho_I^2 = k_{II} \cdot (k_{III}/k_{II}) = k_{III}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ελαστικές δυνάμεις επαναφοράς του δεύτερου συστήματος έχουν σταθερό μοχλοβραχίονα ίσο με ρ_I .

B' τρόπος: Η ακτίνα δυστρεψίας δίδεται με βάση το πηλικό ορισμένων μετακινήσεων του συστήματος για δύο χωριστές φορτίσεις, ήτοι, η πρώτη φόρτιση με τη δύναμη F_{II} με σημείο εφαρμογής το K και με διεύθυνση αυτήν του άξονα II (σχ. 7α), και η δεύτερη φόρτιση με τη ροπή στρέψης $M = 1 \cdot F_{II}$ (σχ. 7β). Η πρώτη φόρτιση δίνει μετατόπιση του σημείου K ίση με $u_{II} = F_{II}/k_{II}$, ενώ η δεύτερη φόρτιση δίδει γωνία στροφής περί το K $\theta_z = (1 \cdot F_{II})/k_{III}$. Επομένως, η ακτίνα δυστρεψίας ρ_I δίδεται (σχ. 7γ):

$$\rho_I = \sqrt{\frac{k_{III}}{k_{II}}} = \sqrt{\frac{(1 \cdot F_{II})/\theta_z}{F_{II}/u_{II}}} = \sqrt{\frac{u_{II}}{\theta_z}} \quad (3.5)$$

Ο δεύτερος αυτός τρόπος δεν απαιτεί το ρητό υπολογισμό των δεικτών δυσκαμψίας k_{III} , k_{II} του συστήματος και αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε πιο σύνθετα συστήματα όπου ο υπολογισμός των δεικτών δυσκαμψίας είναι δυσχερής. Μάλιστα έχει δειχτεί [17] με τη θεωρία των συνεχών συστημάτων ότι ο υπόψη τρόπος μπορεί να γενικευτεί από τα μονοβάθμια στα πολυβάθμια, αρκεί να είναι δυνατό να ορισθούν στο εξεταζόμενο σύστημα ο ελαστικός άξονας και οι κύριες διευθύνσεις του.

Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε τρεις περιπτώσεις χωρικών πολυώροφων μονοσυμμετρικών συστημάτων, ήτοι αμιγές καμπτικό, αμιγές διατμητικό και μικτό σύστημα, αποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση ότι η ακτίνα δυστρεψίας δίδεται από την ακόλουθη σχέση (σελ. 120-126 [17]):

$$\rho_I = \sqrt{\frac{B_{o,P} \cdot u_{II}(\xi)}{M_{o,P} \cdot \theta_z(\xi)}} \quad (3.6)$$

όπου:

$B_{o,P} = \eta$ διρροπή της εξωτερικής φόρτισης $M(z) = c \cdot F(z)$ στη βάση $P_o(X_p, Y_p)$ όπου $c = \text{σταθερά}$.

$M_{o,P} = \eta$ ροπή κάμψης των εξωτερικών στατικών δυνάμεων $F(z)$ στη βάση $P_o(X_p, Y_p)$.

$u_{II}(\xi) = \eta$ μετατόπιση κατά τη διεύθυνση II του πραγματικού ή πλασματικού ελαστικού άξονα στη στάθμη $\xi = z/H$ για φόρτιση του συστήματος με τις δυνάμεις $F(z)$ κατά II.

$\theta_z(\xi) = \eta$ γωνία στροφής του διαφράγματος γύρω από τον πραγματικό ή πλασματικό ελαστικό άξονα στη στάθμη $\xi = z/H$ για στρεπτική φόρτιση του συστήματος με τις ροπές $M(z)$.

Στη σχέση (3.6) θεωρώντας ότι οι ροπές $M(z)$ ισούνται με $M(z) = l \cdot F(z)$, προκύπτει ότι ο λόγος $B_{o,P}/M_{o,P}$ ισούται με τη μονάδα, ενώ τότε η ακτίνα δυστρεψίας δίδεται από:

$$\rho_I = \sqrt{\frac{u_{II}(\xi)}{\theta_z(\xi)}}$$

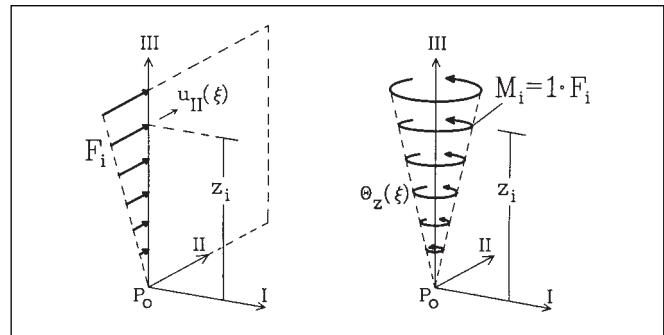
που αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης σχέσης των μονωρόφων.

Η απαλοιφή του λόγου $B_{o,P}/M_{o,P}$ από τη σχέση (3.6) μπορεί να επιτευχθεί και με το διακριτό μοντέλο. Πράγματι, παρατηρώντας το σχήμα 8 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{B_{o,P}}{M_{o,P}} &= \frac{M_1 \cdot z_1 + M_2 \cdot z_2 + \dots + M_N \cdot z_N}{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_N \cdot z_N} = \\ &= \frac{(1 \cdot F_1) \cdot z_1 + (1 \cdot F_2) \cdot z_2 + \dots + (1 \cdot F_N) \cdot z_N}{F_1 \cdot z_1 + F_2 \cdot z_2 + \dots + F_N \cdot z_N} = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς, πρέπει το διάνυσμα \mathbf{M} των ομόσημων στρεπτικών ροπών να προκύπτει από ζεύγη των δυνάμεων \mathbf{F} με μοναδιαίο μοχλοβραχίονα $\mathbf{M}=l \cdot \mathbf{F}$.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συνεχών συστημάτων διενεργήθηκε εκτεταμένη παραμετρική ανάλυση στην εξισωση (3.6) και προέκυψε ότι για κάθε στάθμη ξ η ακτίνα δυστρεψίας ρ_I των μικτών μονοσυμμετρικών συστημάτων δεν είναι σταθερή κατά την έννοια του ύψους, αλλά η τιμή της ακολουθεί πάντοτε μια κατανομή, της οποίας η γενική μορφή φαίνεται ενδεικτικά στα διαγράμματα των σχημάτων 9α και 9β, τα οποία προέκυψαν από δύο συγκεκριμένα δεκαώροφα μικτά μονοσυμμετρικά συστήματα. Στο διάγραμμα 9α η ακτίνα δυστρεψίας r_{s,P_o} του διατμητικού υποσυστήματος, εκφρασμένη ως προς τον κατακόρυφο πραγματικό ή πλασματικό ελαστικό άξονα που διέρχεται από το σημείο P_o ,



Σχήμα 8: Υπολογισμός ροπής και διρροπής στη βάση του ελαστικού άξονα.

Figure 8: Computation of moment and bimoment at base (P_o) of axis of optimum torsion.

είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα δυστρεψίας r_{k,P_o} του καμπτικού υποσυστήματος, εκφρασμένη στο ίδιο σημείο, όπου:

$$r_{s,P_o} = \sqrt{r_{s,s}^2 + (\bar{K}_S - x_o)^2}, \quad r_{k,P_o} = \sqrt{r_{k,k}^2 + x_o^2} \quad (3.7)$$

$$\text{με } r_{s,s} = \sqrt{S_{III}/S_{II}}, \quad r_{k,k} = \sqrt{K_{III}/K_{II}}$$

Στο διάγραμμα 9β παρουσιάζεται η αντίστροφη εικόνα.

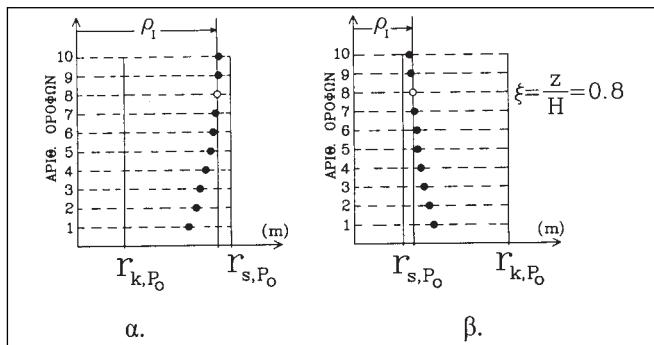
Από τα υπόψη διαγράμματα παρατηρούμε τα κάτωθι:

α) Η τιμή της ακτίνας δυστρεψίας ρ_I είναι μεταβλητή από όροφο σε όροφο και για το λόγο αυτό δεν μπορεί να ορισθεί ενιαία τιμή για ολόκληρο το σύστημα.

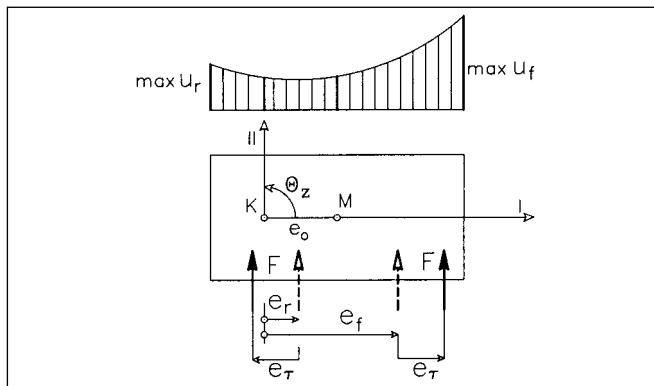
β) Η τιμή της ακτίνας δυστρεψίας ρ_I σε κάθε όροφο πάντοτε περιβάλλεται από δύο όρια, αυτά των ακτίνων δυστρεψίας του καμπτικού και του διατμητικού υποσυστήματος, και πλησιάζει πάντοτε πολύ κοντά στην ακτίνα δυστρεψίας του διατμητικού υποσυστήματος.

γ) Η διασπορά της τιμής της ακτίνας δυστρεψίας ρ_I από όροφο σε όροφο δεν είναι σημαντική για τη συντριπτική πλειοψηφία των ορόφων, στα κανονικά καθ' ύψος πολυώροφα μικτά συστήματα. Συνεπώς, δυνάμεθα - μέσα στο πλαίσιο των συνήθων προσεγγίσεων που γίνονται στις απλοποιημένες μεθόδους αντισεισμικού υπολογισμού - να λάβουμε μια μέση τιμή ακτίνας δυστρεψίας ορόφου και αυτή να τη θεωρήσουμε ως ενιαία τιμή ακτίνας δυστρεψίας του συστήματος. Για λόγους υπολογιστικής απλότητας προτείνεται να λαμβάνεται ως μέση τιμή η ακτίνα δυστρεψίας της στάθμης $z = 0.8H$, διότι η στάθμη αυτή του συστήματος χρησιμοποιείται και για την εύρεση του άξονα βέλτιστης στρέψης, όπως αναπτύχθηκε στην παράγραφο 3.

Τέλος, το μέγεθος της παραπάνω ακτίνας δυστρεψίας ρ_I του πολυώροφου συστήματος συγκρινόμενο με την ακτίνα



Σχήμα 9: Κατανομή των ακτίνων δυστρεψίας καθ' ύψος.
Figure 9: Distribution of torsional radius of the floors.



Σχήμα 10: Ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες.
Figure 10: Equivalent static eccentricities.

αδράνειας $r = \sqrt{J/m}$ του διαφράγματος επιτρέπει τη διάγνωση της στρεπτικής ευαισθησίας του συστήματος, κατά τα γνωστά από τη μελέτη του προβλήματος αυτού στα μονώρφα συστήματα [2]. Δηλαδή, αν

$$\rho_{mx} = \sqrt{\rho_I^2 + e_{ox}^2}$$

είναι η ακτίνα δυστρεψίας εκφρασμένη στο κέντρο μάξας M του συστήματος και ισχύει $\rho_{mx} \leq r$ ή $\rho_{mx} \approx r$, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως στρεπτικά ευαίσθητο για δυναμική φόρτιση. Επίσης, η ακτίνα δυστρεψίας ρ_I στα πολυώρφα συστήματα χρησιμοποιείται και στον υπολογισμό των ισοδύναμων στατικών εκκεντροτήτων για την εφαρμογή των απλοποιημένων μεθόδων αντισεισμικού υπολογισμού.

5. ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΕΣ

Για τον καθορισμό του σημείου εφαρμογής των στατικών σεισμικών δυνάμεων χρησιμοποιούνται οι ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες e_f , e_r σε συνδυασμό με την τυχηματική e_{ti} . Από τη μελέτη του μονοσυμμετρικού μονώρφου ομοιώματος προέκυψε ότι για την περιβολή της δυναμικής από-

κρισης για διέγερση κάθετη προς τον άξονα συμμετρίας του απαιτούνται δύο στατικές επιλύσεις με διαφορετικές “ισοδύναμες” στατικές εκκεντρότητες (σχ. 10).

Από ανελαστικούς υπολογισμούς δείχθηκε ότι κτίρια, που σχεδιάσθηκαν με την “ισοδύναμη” στατική μέθοδο και με χρήση των υπόψη εκκεντροτήτων, εμφάνισαν μικρές πρόσθετες απαιτήσεις πλαστιμότητας στα περιμετρικά στοιχεία [1].

Οι εκκεντρότητες e_f και e_r υπολογίζονται βάσει των παρακάτω δύο κριτηρίων ισότητας μεταξύ της στατικής και δυναμικής απόκρισης του μονώρφου ομοιώματος [2]:

- Κριτήριο μέγιστης γωνίας στροφής:

Με το πρώτο αυτό κριτήριο υπολογίζεται η εκκεντρότητα e_f που καθορίζει τη θέση της δυνάμεως προς την εύκαμπτη πλευρά του συστήματος, θεωρώντας την ισότητα της στατικής γωνίας στροφής $\theta_z(e_f)$ αυτού με την αντίστοιχη μέγιστη δυναμική $\max \theta_z$ (σχ. 10).

- Κριτήριο μέγιστης μετατόπισης:

Με το δεύτερο αυτό κριτήριο υπολογίζεται η εκκεντρότητα e_r που καθορίζει τη θέση της δυνάμεως προς τη δύσκαμπτη πλευρά του συστήματος, θεωρώντας την ισότητα της στατικής μετατόπισης $\psi_r(e_r)$ της δύσκαμπτης πλευράς του συστήματος με την αντίστοιχη μέγιστη δυναμική $\max \psi_r$ (σχ. 10).

Από τη διερεύνηση [2] των δύο αυτών συνθηκών ισότητας σε ένα μονοσυμμετρικό σύστημα με άξονα συμμετρίας τον $x=I$ προέκυψαν οι κάτωθι ακριβείς σχέσεις υπολογισμού των e_f και e_r συναρτήσει της ακτίνας δυστρεψίας ρ_I και της στατικής εκκεντρότητας e_o του μονωρόφου (σχ. 10):

$$e_f = \frac{\rho_I^2}{r} \cdot R_f \geq e_o \quad (5.1\alpha)$$

$$e_r = \frac{\rho_I^2}{r} \cdot \frac{1 - D_r}{\ell_r - e_o} \leq \frac{1}{2} \cdot e_o \quad (5.1\beta)$$

όπου:

$$R_f = \frac{\eta \mu 2\theta}{2} \cdot \left(\frac{1}{A_1^{2n}} + \frac{1}{A_2^{2n}} - 2\varepsilon_{12} \cdot \frac{1}{A_1^n \cdot A_2^n} \right)^{1/2}$$

$$D_r = \frac{\eta \mu 2\theta}{2} \cdot \left(\frac{\delta_{r1}^2}{A_1^{2n}} + \frac{\delta_{r2}^2}{A_2^{2n}} + 2\varepsilon_{12} \cdot \frac{\delta_{r1} \cdot \delta_{r2}}{A_1^n \cdot A_2^n} \right)^{1/2}$$

$$\text{εφα}_o = \frac{2\varepsilon_o}{\varepsilon_o^2 + \mu^2 - 1}, \quad \alpha_o = \text{γωνία σε μοίρες.}$$

Αν $\epsilon \varphi \alpha_0 \geq 0$, τότε $\theta = \alpha_0/2$.

Αν $\epsilon \varphi \alpha_0 < 0$, τότε $\theta = 90 - |\alpha_0|/2$

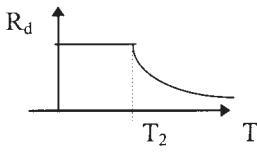
$$\epsilon_o = \frac{e_o}{r}, \rho_I = \sqrt{\frac{k_{III}}{k_{II}}} = \sqrt{\frac{u,F}{\theta,M}}, \mu = \frac{\rho_I}{r},$$

$$A_1 = 1 - \epsilon_o \cdot \epsilon \varphi \theta, A_2 = 1 + \epsilon_o \cdot \sigma \varphi \theta$$

$$\delta_{r1} = \sigma \varphi \theta - \ell_r, \quad \delta_{r2} = \epsilon \varphi \theta + \ell_r, \quad \ell_r = \frac{L_r}{r}$$

$$\epsilon_{12} \ (\zeta = 5\%), \ r_{12} = \sqrt{A_2/A_1},$$

$$\epsilon_{12} = \frac{8\zeta^2 \cdot (1+r_{12}) \cdot r_{12}^{3/2}}{(1-r_{12}^2)^2 + 4\zeta^2 \cdot r_{12} \cdot (1+r_{12})^2}$$



$$n = 1 \text{ για } T_y < T_2, n = 2/3 \text{ για } T_y > T_2.$$

Επίσης, υπενθυμίζεται ότι για τον υπολογισμό των τελικών εκκεντροτήτων σχεδιασμού χρησιμοποιείται και η τυχηματική εκκεντρότητα $e_{\tau,x} = 0.05 \cdot L_x$ ή $e_{\tau,x} = 0.10 \cdot L_x$ κατά τρόπο, ώστε να μετατοπίζεται ο φορέας των οριζοντίων στατικών δυνάμεων ακόμα πιο έκκεντρα (σχ. 10). Τέλος, στην περίπτωση του διπλά ασύμμετρου συστήματος η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται και για τον κύριο άξονα II αυτού.

6. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

6.1. Δεδομένα αριθμητικού παραδείγματος

Για τις ανάγκες του παρόντος άρθρου διενεργήθηκε με το διακριτό μοντέλο εκτεταμένη παραμετρική ανάλυση σε μια σειρά από εύστρεπτα πολυώροφα κτίρια και παρουσιάζεται ενδεικτικά ένα πενταώροφο κτίριο, με ασύμμετρη διάταξη των στοιχείων δυσκαμψίας, από οπλισμένο σκυρόδεμα (σχ. 11). Για όλες τις επιλύσεις χρησιμοποιήθηκε το γνωστό πρόγραμμα H/Y Super-Etabs.

Δεδομένα:

Υψος κτιρίου: $H=5 \times 3.2=16.0m$

Μάζα ορόφου: $m=756.t$ (SI)

Μαζική ροπή αδράνειας: $J=71127. \text{tm}^2$

Υποστυλώματα:

Όροφοι	Διατομές στύλων
1	55x55
2	50x50
3	40x40
4	35x35
5	35x35

Τοιχώματα σταθερής διατομής καθ' ύψος:

$$A=0.25 \times 4.00, B=0.25 \times 1.50$$

Δοκοί: Ροπή αδράνειας σταδίου I: $I = 0.006 \text{m}^4$

Κατά τους υπολογισμούς λήφθηκαν υπόψη οι μειωμένες δυσκαμψίες (σταδίου II) για δοκούς και τοιχώματα που προβλέπονται από το NEAK-95.

Σκυρόδεμα: C20, E=29. GPa

Στοιχεία φάσματος σχεδιασμού:

$$A=0.24g, q=3.5, \theta=1.0, \gamma I=1.0, \eta=1,$$

έδαφος κατηγορίας Δ.

Επιτάχυνση σχεδιασμού:

$$R_d(T) = A \cdot \gamma_I \cdot \frac{\eta \cdot \theta \cdot \beta_o}{q} \quad \text{για } T_1 \leq T \leq T_2$$

6.2. Εφαρμογή της απλοποιημένης μεθόδου αντισεισμικού υπολογισμού

6.2.1. Οι αρχικές φορτίσεις "F" και "M"

Στην αρχή του υπολογισμού οι κύριες διευθύνσεις $x \approx I$ και $y \approx II$ του κτιρίου είναι άγνωστες, όπως και η συνακόλουθη τέμνουσα βάσης. Για το λόγο αυτό εκλέγουμε τυχαίο δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς O'XY'Z' και θέτουμε προσωρινά ως τέμνουσα βάσης μια αυθαίρετη τιμή, π.χ. $V_o = 10000. \text{kN}$, και κατανέμουμε αυτή τριγωνικά καθ' ύψος υπολογίζοντας τις δυνάμεις F_j των ορόφων. Δημιουργούμε εν συνεχείᾳ το διάνυσμα M των ομόσημων στρεπτικών ζευγών των παραπάνω δυνάμεων F_j με μοναδιαίο μοχλοβραχίονα $M_j = 1 \cdot F_j$.

$$F = \begin{bmatrix} F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3333.33 \\ 2666.66 \\ 2000.00 \\ 1333.33 \\ 666.66 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 \cdot F_5 \\ 1 \cdot F_4 \\ 1 \cdot F_3 \\ 1 \cdot F_2 \\ 1 \cdot F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3333.33 \\ 2666.66 \\ 2000.00 \\ 1333.33 \\ 666.66 \end{bmatrix}$$

Από τη φόρτιση του χωρικού συστήματος με τη δράση M προκύπτουν οι μετακινήσεις ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς O'XY'Z' του 4ου ορόφου ($z_0=0.80H$):

u_{x4}	0.0043071 m
u_{y4}	-0.0077425 m
θ_{z4}	0.0007714 rad

Ο áξονας μηδενικής ή βέλτιστης στρέψης του κτιρίου, γνωστότερος και ως κατακόρυφος πραγματικός ή πλασματικός ελαστικός áξονας αντίστοιχα, του οποίου οι ιδιότητες και ο ορισμός του δόθηκαν τόσο στην εισαγωγή όσο και λεπτομέρεστερα στη παράγραφο 3, διέρχεται από τον πόλο στροφής $P_0(X_p, Y_p)$, για την υπόψη στρεπτική φόρτιση, της στάθμης $z_o = 0.80H$ [17], [12], [13].

$$X_p = -\frac{u_{y4}}{\theta_{z4}} = -\frac{-0.0077425}{0.0007714} = +10.0369458 \text{ m}$$

$$Y_p = +\frac{u_{x4}}{\theta_{z4}} = +\frac{0.0043071}{0.0007714} = +5.58348457 \text{ m}$$

Αν το σύστημα διαθέτει πραγματικό ελαστικό áξονα, τότε οι παραπάνω σχέσεις θα δώσουν τη θέση του ελαστικού

κέντρου K, δηλαδή τα X_p, Y_p θα προκύψουν σταθερά σε όλες τις στάθμες [12], [13], [17].

- **Φόρτιση X-X**

Οι δυνάμεις F_j τοποθετούνται πάνω στο $P_0(X_p, Y_p)$.

Στη στάθμη $z_o = 0.80H$ προκαλούνται οι μετατοπίσεις:

$$u_{XX} = 0.0545533 \text{ m}, \quad u_{YY} = -0.0004859 \text{ m}$$

- **Φόρτιση Y-Y**

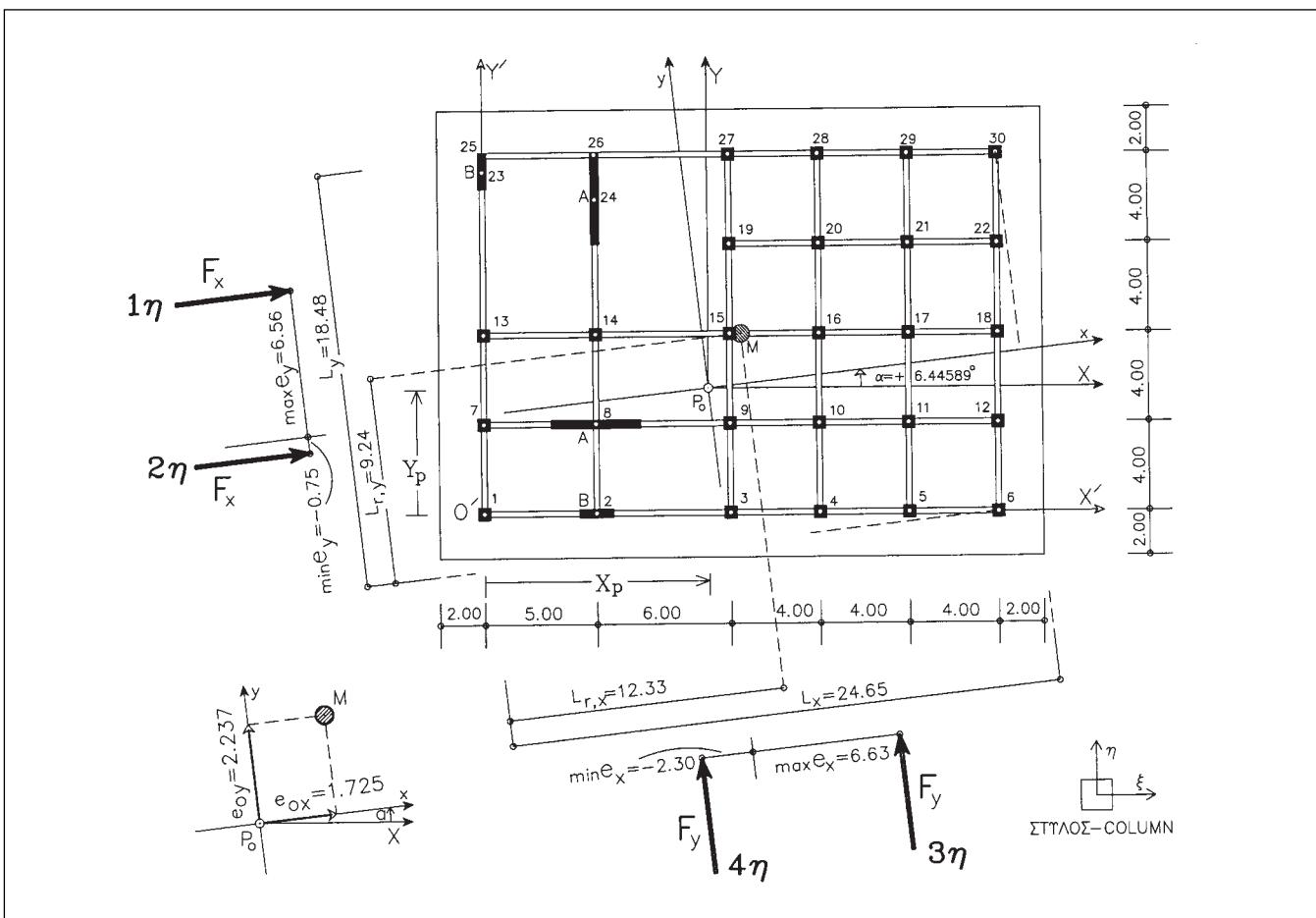
Οι δυνάμεις F_j τοποθετούνται πάνω στο $P_0(X_p, Y_p)$.

Στη στάθμη $z_o = 0.80H$ προκαλούνται οι μετατοπίσεις:

$$u_{YY} = 0.0587992 \text{ m}, \quad u_{XY} = -0.0004859 \text{ m}$$

- **Κύριες διευθύνσεις x, y κτιρίου**

Ο προσανατολισμός των δύο οριζόντιων κύριων διευθύνσεων x, y του κτιρίου, πλασματικού χαρακτήρα, αφού το σύστημα δεν διαθέτει πραγματικούς κύριους áξονες ελαστικότητας I και II, ως προς το σύστημα αναφοράς P_0XY καθορίζεται από τη γωνία α της σχέσης (σχ. 11):



Σχήμα 11: Κάτοψη ξυλοτόπου πενταώροφου κτιρίου.
Figure 11: Plan of a 5-storey building.

$$\varepsilon_{\varphi 2\alpha} = \frac{2 \cdot u_{XY}}{u_{XX} - u_{YY}} = +0.22887965^{\circ} \Rightarrow \alpha = +6.44589^{\circ}$$

- **Στατικές εκκεντρότητες κτιρίου**

Οι δύο στατικές εκκεντρότητες του κτιρίου κατά των κύριων διευθύνσεων x, y προκύπτουν γεωμετρικά (σχ. 11).

- **Διεύθυνση x:** Στατική εκκεντρότητα $e_{ox} = 1.725m$.

- **Διεύθυνση y:** Στατική εκκεντρότητα $e_{oy} = 2.237m$.

- **Ασύζενκτες ιδιοπερίοδοι**

Ο υπολογισμός των **ασύζενκτων** θεμελιωδών ιδιοπεριόδων T_x , T_y του συστήματος κατά τις κύριες διευθύνσεις x και y γίνεται παγιώνοντας όλες τις ελευθερίες κίνησης των ορόφων, πλην της μεταφορικής, κατά την εξεταζόμενη διεύθυνση. Έτσι προκύπτει $T_x = 0.773sec$ και $T_y = 0.797sec$. Συνεπώς, οι οριστικές τέμνουσες βάσης κατά τις κύριες διευθύνσεις x και y είναι ίσες:

$$V_{ox} = m_{ol} \cdot R_d(T_x) = 6463.8 \text{ kN}$$

$$V_{oy} = m_{ol} \cdot R_d(T_y) = 6463.8 \text{ kN}$$

Κατανέμοντας τις τέμνουσες βάσης τριγωνικά προκύπτει το κάτωθι οριστικό διάνυσμα στατικών σεισμικών δυνάμεων κοινό και για τις δύο κύριες διευθύνσεις:

$$F_x = F_y = \begin{bmatrix} F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2154.6 \\ 1723.68 \\ 1292.76 \\ 861.84 \\ 430.92 \end{bmatrix}$$

6.2.2. Ακτίνες δυστρεψίας ρ_x , ρ_y

Οι δύο ακτίνες δυστρεψίας του πενταώροφου κτιρίου υπολογίζονται κατά τις κύριες διευθύνσεις x και y (σχ. 11):

- **Φόρτιση x-x**

Οι δυνάμεις F_x τοποθετούνται πάνω στο $P_o(X_p, Y_p)$.

Η στάθμη $z_o = 0.80H$ μετατοπίζεται απλά κατά τη διεύθυνση της φόρτισης κατά $u_x(z_o) = 0.0352269m$, δίχως στροφή.

- **Φόρτιση y-y**

Οι δυνάμεις F_y τοποθετούνται πάνω στο $P_o(X_p, Y_p)$. Η στάθμη $z_o = 0.80H$ μετατοπίζεται απλά κατά τη διεύθυνση της φόρτισης κατά $u_y(z_o) = 0.0380394m$, δίχως στροφή.

- **Στρεπτικές φορτίσεις M_x , M_y**

Διενεργούνται δύο επιλύσεις με τις δύο αντίστοιχες στρεπτικές ροπές $M_x = 1 \cdot F_x$, $M_y = 1 \cdot F_y$. Επειδή, όμως, στο υπόψη παράδειγμα οι οριστικές τέμνουσες της βάσης κατά

τις κύριες διευθύνσεις x και y είναι ίσες, οι δύο υπόψη επιλύσεις ταυτίζονται. Έτσι διενεργείται μια επίλυση με τη φόρτιση $M_x = M_y$ οπότε η στάθμη $z_o = 0.80H$ περιστρέφεται κατά $\theta_{z,x} = 0.0004986 \text{ rad} = \theta_{z,y}$.

Κατά συνέπεια, οι δύο ακτίνες δυστρεψίας ρ_x , ρ_y του κτιρίου κατά τις κύριες διευθύνσεις x και y είναι:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{u_y(z_o)}{\theta_{z,y}}} = \sqrt{\frac{0.0380394}{0.0004986}} = 8.73 \text{ m}$$

$$\rho_y = \sqrt{\frac{u_x(z_o)}{\theta_{z,x}}} = \sqrt{\frac{0.0352269}{0.0004986}} = 8.41 \text{ m}$$

Για τη διερεύνηση της στρεπτικής ευαισθησίας του κτιρίου εκφράζουμε τις ακτίνες δυστρεψίας από το ελαστικό κέντρο $P_o(X_p, Y_p)$ στο κέντρο μάζας M του κτιρίου και τις συγκρίνουμε με την ακτίνα αδράνειας r του διαφράγματος [2]:

$$r = \sqrt{J/m} = \sqrt{71127./756} = 9.70 \text{ m}$$

$$\rho_{mx} = \sqrt{\rho_x^2 + e_{ox}^2} = \sqrt{8.73^2 + 1.725^2} = 8.90 < r = 9.70$$

$$\rho_{my} = \sqrt{\rho_y^2 + e_{oy}^2} = \sqrt{8.41^2 + 2.237^2} = 8.70 < r = 9.70$$

Αφού μία τουλάχιστον ακτίνα δυστρεψίας είναι μικρότερη από την ακτίνα αδρανείας του διαφράγματος, το κτίριο είναι **στρεπτικά ευαίσθητο** [2], [12], [13].

6.2.3. Υπολογισμός των ισοδύναμων στατικών εκκεντροτήτων

- **Εκκεντρότητες στη διεύθυνση y-y**

Οι ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες κατά την κύρια διεύθυνση y χρησιμοποιούνται κατά τη φόρτιση του συστήματος με τις στατικές σεισμικές δυνάμεις F_x . Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (5.1.) έχουμε:

$$\mu_y = \frac{\rho_y}{r} = \frac{8.41}{9.70} = 0.867, \quad \epsilon_{oy} = \frac{e_{oy}}{r} = \frac{2.237}{9.70} = 0.231$$

$$\ell_{r,y} = \frac{L_{r,y}}{r} = \frac{9.24}{9.70} = 0.9525$$

$$\epsilon_{f,y} = 5.636 > \epsilon_{oy} = 2.237$$

$$\epsilon_{r,y} = 0.178 < 0.5 \cdot \epsilon_{oy} = 1.119$$

Η τυχηματική εκκεντρότητα είναι:

$$\epsilon_{t,y} = 0.05 \cdot L_y = 0.05 \cdot 18.48 = 0.924$$

Οι εκκεντρότητες σχεδιασμού για τις επιλύσεις με τις σεισμικές δυνάμεις F_x μετρούμενες από το P_0 είναι:

$$\max e_y = e_{f,y} + e_{\tau,y} = 5.636 + 0.924 = 6.56 \text{ m}$$

$$\min e_y = e_{r,y} - e_{\tau,y} = 0.178 - 0.924 = -0.75 \text{ m}$$

• Εκκεντρότητες στη διεύθυνση x-x

Οι ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες κατά την κύρια διεύθυνση x χρησιμοποιούνται κατά τη φόρτιση του συστήματος με τις στατικές σεισμικές δυνάμεις F_y . Εφαρμόζοντας τις αναφερόμενες σχέσεις έχουμε:

$$\mu_x = \frac{\rho_x}{r} = \frac{8.73}{9.70} = 0.85, \quad \epsilon_{ox} = \frac{e_{ox}}{r} = \frac{1.725}{9.70} = 0.178$$

$$\ell_{r,x} = \frac{L_{r,x}}{r} = \frac{12.33}{9.70} = 1.271$$

$$e_{f,x} = 5.40 > e_{ox} = 1.725, \quad e_{r,x} = -1.065$$

Η τυχηματική εκκεντρότητα είναι:

$$e_{\tau,x} = 0.05 \cdot L_x = 0.05 \cdot 24.65 = 1.233$$

Οι εκκεντρότητες σχεδιασμού για τις επιλύσεις με τις σεισμικές δυνάμεις F_y μετρούμενες από το P_0 είναι:

$$\max e_x = e_{f,x} + e_{\tau,x} = 5.40 + 1.233 = 6.633 \text{ m}$$

$$\min e_x = e_{r,x} - e_{\tau,x} = -1.065 - 1.233 = -2.298 \text{ m}$$

6.2.4. Ακραίες καταστάσεις φόρτισης

Με γνωστές πια τις τελικές εκκεντρότητες σχεδιασμού διενεργούνται οι τέσσερις τελικές χωριστές στατικές επιλύσεις του συστήματος (π.χ. η 1η και 2η επίλυση κατά τον κύριο άξονα x με εκκεντρότητες $\max e_y$, $\min e_y$ αντίστοιχα και η 3η και 4η επίλυση κατά τον κύριο άξονα y με εκκεντρότητες $\max e_y$, $\min e_y$ αντίστοιχα) (σχ. 11). Τέλος, διενεργείται η χωρική επαλληλία των αποτελεσμάτων των παραπάνω επιλύσεων με τη δημιουργία των κάτωθι τεσσάρων περιπτώσεων **ακραίας στατικής φόρτισης** του συστήματος:

- Ακραία κατάσταση φόρτισης 1 (1η με 3η επίλυση).
- Ακραία κατάσταση φόρτισης 2 (1η με 4η επίλυση).
- Ακραία κατάσταση φόρτισης 3 (2η με 3η επίλυση).
- Ακραία κατάσταση φόρτισης 4 (2η με 4η επίλυση).

Η συνολική ένταση ή μετακίνηση για κάθε ακραία φόρτιση υπολογίζεται με τον κανόνα της απλής τετραγωνικής επαλληλίας των επιμέρους μεγεθών απόκρισης των συνδυαζόμενων επιλύσεων. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει άμεσα η ακραία τιμή κάθε μεγέθους απόκρισης. Άλλα οι ακραίες

τιμές των υπόψη μεγεθών απόκρισης δεν είναι και μεταξύ τους ταυτόχρονες. Εφαρμόζοντας, όμως, κατάλληλες μεθόδους είναι δυνατό να ευρεθούν και οι πιθανές ταυτόχρονες τιμές [18], [19], [20].

6.2.5. Επαλήθευση βέλτιστης στρέψης

Όταν οι οριζόντιες στατικές σεισμικές δυνάμεις βρίσκονται στο αυτό κατακόρυφο φορτιστικό επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το P_0 , τότε πραγματοποιείται η κατάσταση της **βέλτιστης στρέψης** στο N-ώροφο κτίριο, αφού ελαχιστοποιείται το μέγεθος θ^2 [17], [12], [13]:

$$\theta^2 = \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_N^2}{N} = \text{minimum} = \theta_0^2$$

Για άλλες θέσεις (i) του φορτιστικού επιπέδου οι στροφές των ορόφων μεγαλώνουν υπερβολικά και συνακόλουθα η τιμή του μεγέθους θ_i^2 . Στο σχήμα 12 φαίνεται η μεταβολή του θ_i^2 στο υπόψη κτίριο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ελαχιστοποίηση του $\theta_i^2 = \theta_0^2$ συμβαίνει πράγματι στην εγγύτερη περιοχή του P_0 , ενώ, όταν το φορτιστικό επίπεδο τοποθετηθεί στο κέντρο μάζας, το θ_i^2 26-πλασιάζεται. Η μέγιστη απόκλιση του θ_i^2 παρουσιάζεται για τοποθέτηση του φορτιστικού επιπέδου στην περίμετρο της εύκαμπτης πλευράς του κτιρίου, όπου και λαμβάνει τιμή 2465.2 φορές μεγαλύτερη.

6.3. Εφαρμογή δυναμικής φασματικής μεθόδου

6.3.1. Ιδιομορφική ανάλυση. Κέντρα ταλαντώσεως των ορόφων

Για τη διενέργεια της ιδιομορφικής ανάλυσης του συστήματος κατ' αρχήν θεωρούμε ότι η μάζα του κάθε ορόφου είναι συγκεντρωμένη στο γεωμετρικό κέντρο του κάθε διαφράγματος. Για κάθε διάφραγμα η μεταφορική τιμή της μάζας για τις δύο διευθύνσεις x και y είναι $m=756.t$, ενώ η μαζική ροπή αδράνειας γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας, είναι $J_m=71127.\text{tm}^2$. Κατά τη δυναμική φασματική μέθοδο δεν έχει σημασία ο προσανατολισμός της διέγερσης [21]. Εκλέγουμε, λοιπόν, ως σύστημα προσανατολισμού της διέγερσης το x και y.

Οι πρώτες τρεις συζευγμένες ιδιοπερίοδοι του συστήματος ξεκινώνται από τη θεμελιώδη είναι:

T ₁	T ₂	T ₃
0.973 sec	0.794 sec	0.707 sec

Με γνωστές τις ιδιομορφές από την ιδιομορφική ανάλυση μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες (e_{xi} , e_{yi})

των κέντρων ταλαντώσεως O_i των ορόφων από τις σχέσεις [2]:

$$e_{yi} = \frac{\Phi_{xi}}{\Phi_{zi}}, \quad e_{xi} = -\frac{\Phi_{yi}}{\Phi_{zi}} \quad (6.1)$$

Η θέση των κέντρων ταλαντώσεως των ορόφων στην κάτωψη κατά τις **δύο πρώτες ιδιομορφές** αποτελεί τον πλέον αξιόπιστο δείκτη ευστρεψίας του κτιρίου. Όταν τα κέντρα ταλαντώσεως κατά την πρώτη ή δεύτερη ιδιομορφή πίπτουν **εντός** του κύκλου της ακτίνας αδράνειας του διαφράγματος (σχ. 13), τότε αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι εύστρεπτο, δηλαδή για μεταφορική διέγερση κυριαρχούν οι στρεπτικές ταλαντώσεις των διαφραγμάτων έναντι των μεταφορικών.

Από τις δεκαπέντε ιδιομορφές του εξεταζόμενου συστήματος οι πέντε είναι στρεπτικού χαρακτήρα και αυτές συμβαίνει να είναι η 1η θεμελιώδης καθώς και οι υπ' αριθ. 4, 6, 8, 10. Αφού λοιπόν η θεμελιώδης ιδιομορφή είναι στρεπτικού χαρακτήρα, το σύστημα είναι **εύστρεπτο** και αυτό αποτελεί επιβεβαίωση του αντίστοιχου συμπεράσματος που εξήχθη με χρήση της ακτίνας δυστρεψίας στην παράγραφο 6.2.2.

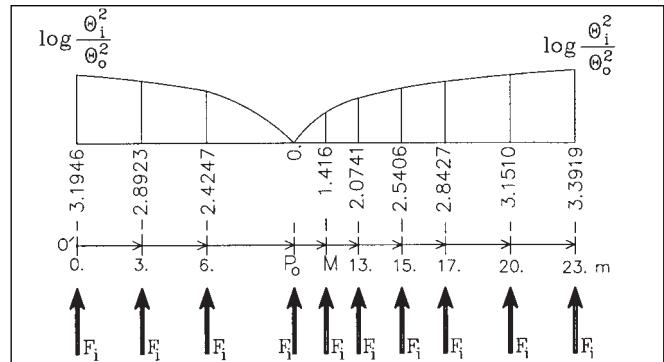
Τέλος, τα κέντρα ταλαντώσεως των υπόλοιπων δέκα ιδιομορφών εμπίπτουν **εκτός** του κύκλου της ακτίνας αδράνειας του διαφράγματος (σχ. 13), γεγονός που δηλώνει ότι κατά τις υπόψη ιδιομορφές κυριαρχούν σε κάθε όροφο οι μεταφορικές ταλαντώσεις.

6.3.2. Δυναμική φασματική επίλυση. Χωρική επαλληλία

Θεωρώντας τις μάζες συγκεντρωμένες στο γεωμετρικό κέντρο του κάθε διαφράγματος εκτελείται δυναμικός φασματικός υπολογισμός για μεταφορική διέγερση χωριστά για κάθε διεύθυνση x και y , ήτοι δύο επιλύσεις. Η επαλληλία των ιδιομορφικών αποκρίσεων γίνεται με τη μέθοδο CQC και λαμβάνονται υπόψη όλες οι ιδιομορφές του συστήματος, δηλαδή το 100% των δρωσών μαζών.

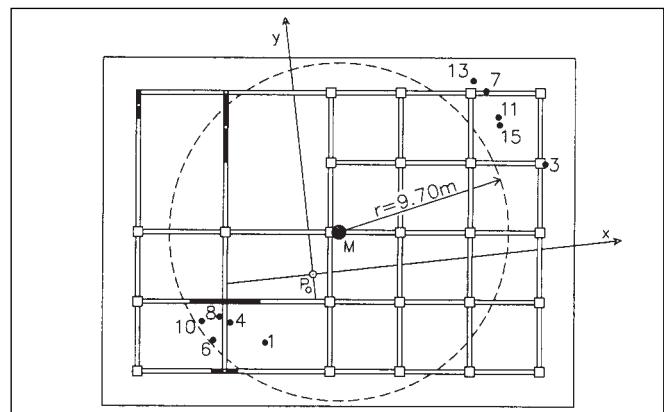
Υπάρχουν διάφορες απόψεις για το πόση σε μέγεθος και πώς πρέπει να λαμβάνεται η τυχηματική εκκεντρότητα κατά την εφαρμογή της δυναμικής φασματικής μεθόδου. Με την τυχηματική εκκεντρότητα επιδιώκεται να ληφθούν υπόψη η στρεπτική διέγερση βάσης, οι κατασκευαστικές ατέλειες και οι τυχαίες διασπορές μαζών, δυσκαμψιών, αντοχών, αποσβέσεων.

Η πρώτη άποψη είναι να χρησιμοποιηθεί κατάλληλο στρεπτικό φάσμα επιταχύνσεων [22], [23] διενεργώντας δυναμικό φασματικό υπολογισμό με στρεπτική διέγερση βάσης, ενώ με την τυχηματική εκκεντρότητα να λαμβάνο-



Σχήμα 12: Κατανομή του Θ_i^2 .

Figure 12: Distribution of Θ_i^2 .



Σχήμα 13: Κέντρα ταλαντώσεως του 3ου ορόφου.

Figure 13: Center of vibration of 3rd shear.

νται υπόψη οι υπόλοιποι αβέβαιοι παράγοντες. Λόγω, όμως, της πολύ περιορισμένης βιβλιογραφίας σε στρεπτικά φάσματα επιταχύνσεων συνηθίζεται από τους κανονισμούς η λήψη της στρεπτικής διέγερσης να λαμβάνεται έμμεσα στην τυχηματική εκκεντρότητα.

Η δεύτερη άποψη είναι η μάζα του κάθε ορόφου να μετακινείται, κάθετα προς τη διέγερση, εκατέρωθεν της θεωρητικής της θέσης κατά εκκεντρότητα ίση με την τυχηματική και στη συνέχεια να εκτελούνται δύο δυναμικές φασματικές επιλύσεις για κάθε κατεύθυνση. Συνήθως οι σύγχρονοι αντισεισμικοί κανονισμοί προτείνουν κατ' αποκοπή τιμή της τυχηματικής εκκεντρότητας $e_{ti} = \pm 0.05 \cdot L$ ή $e_{ti} = \pm 0.10 \cdot L$.

Η τρίτη άποψη, λόγω της εγγενούς αβεβαιότητας της τιμής της τυχηματικής εκκεντρότητας, είναι να χρησιμοποιούνται ομόσημες στατικές στρεπτικές ροπές σε κάθε όροφο ίσες με $M_i = \pm(0.05 \cdot L) \cdot F_i$ ή $M_i = \pm(0.10 \cdot L) \cdot F_i$. Με την εκκεντρότητα $\pm 2 \cdot e_t$ θεωρείται ότι λαμβάνονται καλύτερα υπόψη οι αβέβαιοι παράγοντες. Τα αποτελέσματα απόκρισης από την εν λόγω στατική στρεπτική φόρτιση επαλληλίζονται

αριθμητικά στα αντίστοιχα αποτελέσματα (συνήθως τα μέγιστα, τα οποία όμως δεν είναι ταυτόχρονα) της δυναμικής φασματικής μεθόδου για μεταφορική διέγερση και έτσι προκύπτει η ένταση της μιας σεισμικής συνιστώσας. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τη δεύτερη σεισμική συνιστώσα. Η δε χωρική επαλληλία των δύο συνιστώσων γίνεται ως γνωστόν επί των αποτελεσμάτων της απόκρισης σύμφωνα με τον κανόνα:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

όπου E_x, E_y οποιοδήποτε μέγεθος απόκρισης κατά x και y αντίστοιχα. Οφείλουμε εδώ, όμως, να επισημάνουμε ότι η τρίτη αυτή άποψη παρά τη φαινομενική της απλότητα δημιουργεί σοβαρά προβλήματα συνέπειας, όπως:

α) Η επαλληλία των μεγεθών απόκρισης από δύο εντελώς διαφορετικές μεθόδους (δυναμικής και στατικής) είναι εκ φύσεως αμφισβητήσιμη.

β) Από την υπόψη επαλληλία χάνεται η έννοια των ταυτόχρονων μεγεθών απόκρισης εκ της δυναμικής φασματικής μεθόδου.

Στο παρόν άρθρο για τη λήψη της τυχηματικής εκκεντρότητας, και παρά τις πιο πάνω αντιρρήσεις, επιλέχθηκε η πρόσθετη στατική φόρτιση ομόσημων στρεπτικών ροπών διενεργώντας έτσι δύο χωριστές επιλύσεις με τις εξής στατικές στρεπτικές φορτίσεις σε κάθε όροφο:

$$\pm 2 \cdot e_{ty} \cdot F_x = \pm 2 \cdot (0.05 \cdot 18.48) \cdot F_{xi} = \pm 1.848 \cdot F_{xi} \quad (6.2)$$

$$\pm 2 \cdot e_{tx} \cdot F_y = \pm 2 \cdot (0.05 \cdot 24.65) \cdot F_{yi} = \pm 2.465 \cdot F_{yi} \quad (6.3)$$

Τα αποτελέσματα από την κάθε μία επίλυση επαλληλίστηκαν αλγεβρικά με τα αντίστοιχα μέγιστα (αλλά όχι και ταυτόχρονα) αποτελέσματα απόκρισης για ανεξάρτητη μεταφορική διέγερση. Δηλαδή η μεταφορική διέγερση κατά x συνδύαστηκε με τη φόρτιση της σχέσης (6.2) και προέκυψε η απόκριση E_x , ενώ η μεταφορική διέγερση κατά y συνδύαστηκε με τη φόρτιση της σχέσης (6.3) και προέκυψε η απόκριση E_y και ακολούθησε ο κανόνας της απλής τετραγωνικής επαλληλίας μεταξύ των E_x, E_y .

6.4. Εφαρμογή ισοδύναμης στατικής μεθόδου κατά το NEAK-95

Το υπόψη **εύστρεπτο** κτίριο μελετήθηκε και με την ισοδύναμη στατική μέθοδο που προβλέπει ο NEAK-95. Εκλέχθηκε, ανθυίρετα, ο προσανατολισμός των δύο οριζόντιων σεισμικών συνιστώσων έτσι, ώστε να συμπίπτει με τους γεωμετρικούς άξονες X και Y . Τονίζεται ότι σε συνθετότερα χωρικά συστήματα, στα οποία η διάταξη των κατακόρυφων

στοιχείων δεν είναι ορθογωνική, δεν είναι προφανής ο προσανατολισμός των κύριων διευθύνσεων x, y του συστήματος. Έτσι η μόνη μέθοδος προσδιορισμού των x και y είναι τα αναπτυσσόμενα στην παράγραφο 6.2 του παρόντος. Κατά τα λοιπά, διενεργήθηκαν τέσσερις αναλύσεις του συστήματος, δύο ανά κατεύθυνση, με χρήση της τυχηματικής εκκεντρότητας $0.05 \cdot L$, όπου $L =$ η κάθετη διάσταση της κατασκευής ως προς την εξεταζόμενη διεύθυνση. Υπολογίσθηκαν οι συντελεστές ξ_i όλων των ορόφων, για κάθε μία ανάλυση χωριστά, οι οποίοι και προέκυψαν στο σύνολό τους μικρότεροι του δύο. Δηλαδή, κατά το NEAK-95, οι όροφοι του κτηρίου χαρακτηρίζονται ως δύστρεπτοι. Μάλιστα από την 2η ανάλυση, φόρτιση κατά X τοποθετημένη κάτω από το κέντρο μάζας (σχ. 11), οι συντελεστές ξ_i βρέθηκαν μικρότεροι και της μονάδας για όλους τους ορόφους, αφού κυμάνθηκαν μεταξύ 0.838 και 0.968, και συνεπώς δεν απαιτήθηκε επαναληπτική επίλυση με διαφορετική εκκεντρότητα σχεδιασμού. Οι συντελεστές ξ_i από τις άλλες τρεις αναλύσεις, και για όλους τους ορόφους, κυμάνθηκαν μεταξύ 0.7264 έως 1.6346 και πάντοτε μικρότεροι του δύο. Συνεπώς, το κτίριο θεωρείται κανονικό με βάση όλα τα σχετικά κριτήρια του κανονισμού. Η καθ' ύψος κατανομή των στατικών σεισμικών δυνάμεων λήφθηκε τριγωνική. Οι τρεις υπόψη αναλύσεις επαναληφθηκαν, με διαφορετική όμως εκκεντρότητα σχεδιασμού, αφού η τυχηματική εκκεντρότητα πολλαπλασιάσθηκε με 1.5 · ξ_i . Έτσι συνολικά διενεργήθηκαν επτά αναλύσεις στο υπόψη κτίριο. Ακολούθησε η χωρική επαλληλία επί των αποτελεσμάτων των αναλύσεων με τον κανόνα της απλής τετραγωνικής επαλληλίας.

6.5. Σύγκριση αποτελεσμάτων

Παρακάτω δίδονται τα τελικά διαγράμματα χωρικής επαλληλίας των ροπών κάμψης

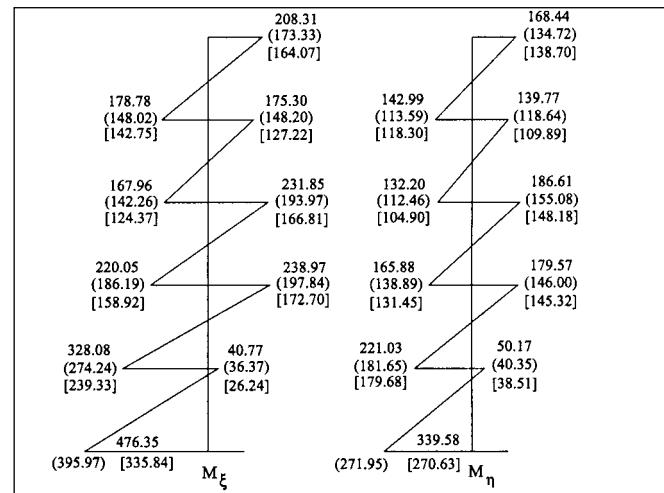
$$(M_\xi, M_\eta)$$

από την απλοποιημένη μέθοδο αντισεισμικού υπολογισμού στους στύλους 1 (σχ. 14) και 30 (σχ. 15), οι οποίοι βρίσκονται στη γωνία της δύσκαμπτης και εύκαμπτης πλευράς του κτηρίου αντίστοιχα. Επίσης, δίδεται και το διάγραμμα ροπών κάμψης στο τοίχωμα 24 (σχ. 16).

Μέσα σε παρένθεση δίδονται οι αντίστοιχες τιμές εκ της δυναμικής φασματικής μεθόδου, όπως αυτή εφαρμόσθηκε στην παράγραφο 6.3.2., ενώ μέσα σε αγκύλες δίδονται οι αντίστοιχες τιμές εκ της ισοδύναμης στατικής μεθόδου κατά NEAK-95, όπως αυτή εφαρμόσθηκε στην παράγραφο 6.4. Παρατηρούμε ότι η ορθολογική και τεκμηριωμένη εφαρμογή της προτεινόμενης απλοποιημένης μεθόδου περιβάλλει τα

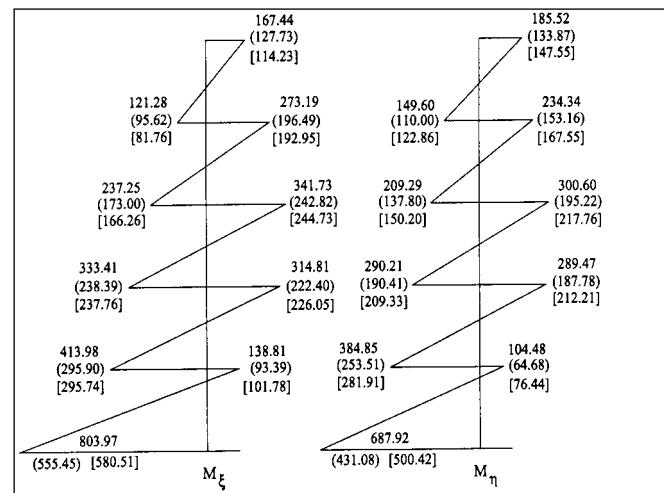
αντίστοιχα μεγέθη απόκρισης της δυναμικής φασματικής μεθόδου. Αντίθετα, η ισοδύναμη στατική μέθοδος, κατά NEAK-95, στο στύλο 1 (σχ. 14) της δύσκαμπτης πλευράς δεν περιβάλλει τη δυναμική φασματική μέθοδο. Επίσης, παρατηρούμε ότι στο στύλο 30 (σχ. 15), που βρίσκεται στην εύκαμπτη πλευρά του κτιρίου, η απλοποιημένη μέθοδος δίνει συντηρητικά αποτελέσματα. Αυτό, όμως, είναι αναμενόμενο και συμβαίνει αναπόφευκτα, αλλά και πρέπει να συμβαίνει, κατά τη γνώμη μας, για τους κάτωθι λόγους:

- Με την προτεινόμενη απλοποιημένη μέθοδο επιτυγχάνεται πάντοτε, σε όλα τα εύστρεπτα συστήματα που διαθέτουν ελαστικό άξονα, η περιβολή τόσο των εντατικών μεγεθών στα στοιχεία της δύσκαμπτης πλευράς όσο και των γωνιών στροφής των ορόφων, όπως αναλυτικά περιγράφηκε στην παράγραφο 5 του παρόντος, και για το λόγο αυτό παρουσιάζεται αναπόφευκτα η υπερδιαστασιολόγηση στα στοιχεία της εύκαμπτης πλευράς.
- - Η υπερδιαστασιολόγηση αυτή είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη στην ανελαστική απόκριση του συστήματος. Πράγματι, συστηματικές έρευνες της ανελαστικής απόκρισης του μονώροφου μονοσυμμετρικού συστήματος έχουν δείξει ότι με την εισαγωγή των “ισοδύναμων” στατικών εκκεντροτήτων e_f , e_r επιτυγχάνεται σημαντική βελτίωση όχι μόνο της ελαστικής αλλά και της μετελαστικής απόκρισης του. Επίσης, ειδικότερες συστηματικές έρευνες αξιολόγησης των στρεπτικών διατάξεων των κανονισμών κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι με τη χρήση της e_r προκύπτει περιβολή της έντασης στα στοιχεία της δύσκαμπτης πλευράς με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των **πρόσθετων** απαιτήσεων πλαστιμότητας σε αυτά. Οι απαιτήσεις πλαστιμότητας της υπόψη πλευράς περιορίζονται σε αυτές του αντίστοιχου συμμετρικού συστήματος υπό μεταφορική διέγερση. Για το λόγο αυτό θεσπίσθηκε το άνω όριο $0.5 \cdot e_0$ στη σχέση 5.1β. Με τη χρήση της e_f , και τη συνακόλουθη υπερδιαστασιολόγηση της εύκαμπτης πλευράς, παρουσιάζεται η οριακή περιβολή των **ανελαστικών** μετακινήσεων της εύκαμπτης πλευράς, ενώ ταυτόχρονα οι απαιτήσεις πλαστιμότητας περιορίζονται σε αυτές του αντίστοιχου συμμετρικού συστήματος υπό μεταφορική διέγερση. Για το λόγο αυτό, άλλωστε, τίθεται ως κάτω όριο της e_f η τιμή της e_0 στη σχέση 5.1α. Στην εργασία [2] αναφέρονται συγκεντρωτικά 18 πρόσφατες πειραματικές εργασίες που τεκμηριώνουν τα παραπάνω. Τονίζεται, τέλος, ότι ακόμα και η εφαρμογή της δυναμικής φασματικής μεθόδου ως επιλεχθείσας μεθόδου ελαστικού υπολογισμού δεν επαρκεί για την ολοκλήρωση της μελέτης, αφού πρέπει να συμπληρώνεται απαραίτητως με την εξασφάλιση και υψηλού βαθμού πλαστιμότητας στα στοιχεία της εύκαμπτης πλευράς.



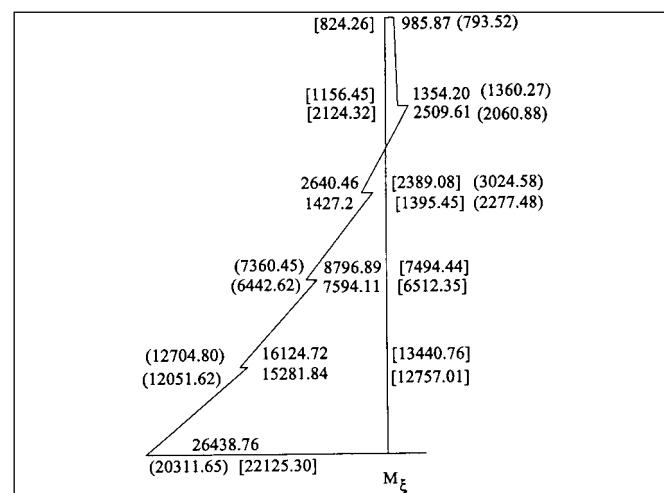
Σχήμα 14: Διαγράμματα ροπών του στύλου 1.

Figure 14: Diagrams of moment of column 1.



Σχήμα 15: Διαγράμματα ροπών του στύλου 30.

Figure 15: Diagrams of moment of column 30.



Σχήμα 16: Διάγραμμα ροπών του τοιχώματος 24.

Figure 16: Diagrams of moment of wall 24.

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο άρθρο αυτό έγινε η διερεύνηση/παρουσίαση των ιδιοτήτων του άξονα βέλτιστης στρέψης, γνωστότερου και ως κατακόρυφου πλασματικού άξονα, των μικτών πολυώροφων συστημάτων χρησιμοποιώντας τη θεωρία των συνεχών συστημάτων. Η κατάσταση βέλτιστης στρέψης είναι πάντοτε εφικτή σε όλα τα μικτά πολυώροφα συστήματα και για το λόγο αυτό ο υπόψη άξονας μπορεί να υποκαταστήσει τον ελαστικό άξονα παίζοντας τον ίδιο ρόλο με τον τελευταίο. Δόθηκε ο ορισμός της ακτίνας δυστρεψίας στα πολυώροφα μικτά συστήματα.

Από εκτεταμένη παραμετρική ανάλυση μιας σειράς από εύστρεπτα πολυώροφα κτίρια, παρουσιάσθηκε ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα. Εφαρμόσθηκε υποδειγματικά σε αυτό η προτεινόμενη απλοποιημένη μέθοδος αντισεισμικού υπολογισμού, η οποία και αποτελεί βελτίωση της ισοδύναμης στατικής μεθόδου που προβλέπεται από τον NEAK-95. Χρησιμοποιήθηκαν οι άξονας βέλτιστης στρέψης του κτιρίου, οι κύριες διευθύνσεις αυτού, η στατική εκκεντρότητα, οι ακτίνες δυστρεψίας και οι ισοδύναμες στατικές εκκεντρότητες. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα της ισοδύναμης στατικής μεθόδου καθώς και της δυναμικής φασματικής. Δείχθηκε ότι είναι δυνατή η επέκταση της ισοδύναμης στατικής μεθόδου ακόμα και σε έντονα εύστρεπτα κτίρια που διαθέτουν απλώς την απαραίμενη από τους κανονισμούς κανονικότητα καθ' ύψος. Τέλος, παρουσιάσθηκαν συγκεκριμένα κριτήρια ευστρεψίας (βλέπε §4, §6.2.2, §6.3.1) με συγκεκριμένη διαδικασία υπολογισμού.

8. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Chopra, A.K., Goel, R.K.: "Evaluation of Torsional Provisions in Seismic Codes", **Journal of Structural Engineering**, vol. 117, No 12, 1991.
- Anastassiadis, K., Athanatopoulou, A., Makarios, T.: "Equivalent Static Eccentricities in the Simplified Methods of Seismic Analysis of Buildings", **Earthquake Spectra the Profes. Jour. of the Earth. Engin. Research Inst.**, vol. 14, Number 1, February 1998.
- Tso, W.K., Dempsey, K.M.: "Seismic Torsional Provisions for Dynamic Eccentricity", **Earth. Engin. and Struct. Dynamics**, vol. 8, pp. 275-289, 1980.

- Dempsey, K.M., Tso, W.K.: "An Alternative Path to Seismic Torsional Provision", **Soil Dynamics and Earth. Engin.**, vol. 1, No 1, 1982.
- Muller, F.P., Keintzel, E., "Erdbebensicherung von Hochbauten", Ernst & Sohn, Berlin, 1984.
- Tso, W.K., "A proposal to improve the static torsional provisions for the National Building Code of Canada", **Canadian J. Civ. Eng.**, 10, pp. 561-565, 1983.
- Rutenberg, A., Pekau, O.A., "Seismic code provisions for asymmetric structures: a re-evaluation", **Eng. Struct.**, vol. 9, pp. 255-264, Oct. 1987.
- Anastassiadis, K., Avramidis, I.E., "Statiche Ersatz lasten fur seismisch beanspruchte unsymmetrisch Geschossbauten", **Bautechnik**, 2/1986.
- Chandler, A.M., Hutchinson, G.L., "Evaluation of the secondary torsional design provisions of earthquake building codes", **Proc. Inst. Civ. Engrs, Part 2**, 85, pp. 587-607, Dec. 1988.
- Riddell, R., Vasquez, J.: "Existence of Centers of Resistance and Torsional Uncoupling of Earthquake Response of Buildings", **proc. 8th World Conf. on Earthquake Eng.**, 4, pp. 187-194, 1984.
- Hezal, R., Chopra, A.K.: "Earthquake response of torsionally-coupled buildings", **report No UCB/e.e.r.c.-87/20**, Berkeley, Dec. 1987.
- Μακάριος, Τ., Αναστασιάδης, Κ.: "Πραγματικός και Πλασματικός Ελαστικός Άξονας Πολυώροφων Κτιρίων: Θεωρία", **Τεχνικά Χρονικά**, τόμος 17, τεύχος 1-2, ΤΕΕ, Αύγουστος 1997.
- Μακάριος, Τ., Αναστασιάδης, Κ.: "Πραγματικός και Πλασματικός Ελαστικός Άξονας Πολυώροφων Κτιρίων: Εφαρμογή", **Τεχνικά Χρονικά**, τόμος 18, τεύχος 1-2, ΤΕΕ, Φεβρουάριος 1998.
- Cheung, V.W.T., Tso, W.K.: "Eccentricity in irregular multistorey buildings", **Can. J. Civ. Eng.** 13, pp. 46-52, 1986.
- Anastassiadis, K.: "Caractéristiques Elastiques Spatiales des Bâtiments à Etages", **Annales de l' I.T.B.T.P.**, No 435, Juin 1985.
- Anastassiadis, K.: "Analyse statique tridimensionnelle du contreventement des bâtiments. La méthode des trois pivots", **Annales de l' I.T.B.T.P.**, No 452, Fev. 1987.
- Μακάριος Τ.: "Πλασματικός Ελαστικός Άξονας Μικτών Πολυώροφων Συστημάτων", διδακτορική διατριβή, **Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ., παράρτ. Ε.Ε.Π.Σ., τόμος ΙΙ, αριθμ. 22**, Θεσσαλονίκη, 1994.
- Gupta, A.K., Singh, M.P.: "Design of Column Sections Subjected to Three Components of Earthquake", **Nuclear Engin. and Design** 41 (1977), pp. 129-133.
- Anastassiadis, K.: "Directions Sismiques Defavorables et Combinations Defavorables des Efforts", **Annales de l' ITBTP**, No 512, Mars-Avril 1993.
- Πανέτσος, Π., Αναστασιάδης, Κ.: "Διαστασιολόγηση Στοιχείων από Οπλισμένο Σκυρόδεμα υπό Σεισμική Ένταση", **11ον Ελληνικό Συνέδριο Σκυροδέματος**, τόμος ΙΙ, 267-281, Κέρκυρα, 1994.
- Αναστασιάδης Κ., Αβραμίδης, Ι.: "Δυνητεύεις Διευθύνσεις Σεισμικής Διεγέρσεως Κτιρίων", **1ο Ελληνικό Συνέδριο Αντισεισμικής Μηχανικής και Τεχνικής Σεισμολογίας**, Αθήνα, 1992.
- Rutenberg, A., Heidebrecht, A.C.: "Rotational Ground Motion and Seismic Codes", **Canad. Journal of Civil Engineering**, vol. 12, 583-592, 1985.
- Rutenberg, A., Heidebrecht, A.C.: "Response Spectra for Torsion, Rocking and Rigid Foundation", **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, vol. 13, 543-557, 1985.

Μακάριος Τριαντάφυλλος,

Δρ πολιτικός μηχανικός Α.Π.Θ., λέκτορας με Π.Δ. 407/80 Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Σχολή Τεχνολογικών Επιστημών, Πεδίον Άρεως, Τ.Κ. 383 34 Βόλος.

Extended summary

Optimum Torsion Axis and Torsional Radii of Gyration in Multi-Storey Buildings

T. MAKARIOS

Dr Civil Engineer, Lecturer (407/80) U.TH.

Abstract

The present paper refers on the one hand to the characteristic qualities of the optimum torsion axis and on the other hand to the definition of the torsional radii of gyration in multi-storey frame-wall systems. The optimum torsion axis is consolidated by using a continuous model of the structure, while the conclusions that arise are verified by using the F.E.M. A substantiating and illustrative presentation is made regarding the equivalent static method with the use of the optimum torsion axis and equivalent static eccentricities through an arithmetical example, while the results of this method are compared with the corresponding results of the dynamic spectral method. Also presented are appropriate criteria for torsionally flexible multi-storey buildings as far as their static and dynamic loading are concerned.

1. INTRODUCTION

The strict application of the equivalent static method to all multi-storey buildings which are regular in elevation requires the existence of certain presuppositions, the most crucial of which are summed up in the observance of the following:

- The lateral static forces, according to the equivalent static method, must have the direction of the principal elasticity axes I, II of the system.
- The position of the lateral static forces in the plan, must be determined by using equivalent static eccentricities so that results of the dynamic response are enveloped. The relevant eccentricities are a function of the static eccentricity and the torsional radius of gyration of the system [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9].

But the static eccentricity, the direction of the principal elasticity axes and the torsional radii of gyration of the system are not generally defined in multi-storey systems, which consequently does not make the strict application of

the equivalent static method to them possible [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16].

For the substantiating application - of the equivalent static method, the vertical elastic optimum torsion axis of a multi-storey system need to be defined. When the level of lateral static seismic forces is placed upon the optimum torsion axis of the system then the twist of the whole system is minimised [12], [13], [17] while the twist is marked with zero in the boundary case that the relevant axis is a real elastic axis of the system. With the help of the optimum torsion axis, the principal directions of the system as well as its torsional radii of gyration are later defined.

Research into the qualities of the vertical optimum torsion axis of multi-storey frame-wall systems, the definition of the torsional radii of gyration of these systems, the step by step presentation of the suggested equivalent static method of anti-seismic calculation and the comparison of its results with the corresponding results of the dynamic spectral response in a torsional flexible asymmetric five-storey building, are the purpose of this paper.

2. THE OPTIMUM TORSION AXIS

By using a continuous model of the structure, a multi-storey spatial frame-wall system splits into two spatial subsystems, the bending one and the shear one, which are coupled. If we consider that these systems maintain invariable in elevation the elastic and geometric characteristics then we can always define the elastic centres K and S of the two subsystems as well as their principal elasticity axes I, II.

It has been proved [16] that the relevant frame-wall multi-storey systems always posses three vertical torsion axes, the

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, which are not upon the same line, while the final response of the system, due to the lateral static loading $F(z)$ continuous distribution in elevation, always results as superposition of the three enforced rotations of the system around the relevant axes (fig. 1a).

It has been proved [16] that when there is a vertical real elastic axis in the system, this results in a partial case of the relative position of the torsion axes $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ and is identified with the Ω_3 while the Ω_1, Ω_2 axes move to infinity (fig. 2a).

In the special case of the monosymmetric multi-storey frame-wall system, having as a symmetrical axis the $x-x$, the axis Ω_1 moves to the y -infinity while the other two axes Ω_2, Ω_3 are upon the $x-x$. On the same symmetrical axis there are both the elastic centres K and S of the bending and the shear subsystem correspondingly. The two axes Ω_2, Ω_3 are always outside of the KS space.

When in the relevant monosymmetric system the lateral static loading $F(z)$ has a direction perpendicular to the symmetric axis of the system, its total response is expressed as superposition of the two enforced rotations of the system around the Ω_2, Ω_3 axes.

When the position of the $F(z)$ is inside the $\overline{\Omega_2\Omega_3}$ space then the two rotations of the system are competitive since they have opposite direction (fig. 3b). Relation 3.1 expresses the criterion of the minimum of the torsion of the whole system.

The relation 3.1 is satisfied approximately when the nullification of the floors' rotation angle takes place at the level $z = 0.8H$ [17], [12], [13], (fig. 4).

Writing the equation nullification of the floors' rotation angle at the relevant level, we can define the point of on which the lateral static loading $F(z)$ must be placed so that the condition of optimum torsion appears. That is exactly what happened to the monosymmetric frame-wall multi-storey system in figure 5. Therefore, the position of the application point P_o resulted from this study.

The vertical axis that goes through point P_o is called Optimum Torsion Axis and satisfies the following boundary conditions [17].

a) Its position in the plan coincides with point K, called the elastic/stiffness centre, in the boundary case where the multi-storey system reduces to the single-storey system.

b) Its position in the plan coincides with point K when the system transforms into a purely bending one.

c) Finally, its position in the plan coincides with point S when the building transforms into purely shear one.

3. TORSIONAL RADII OF GYRATION

The torsional radius of gyration ρ_I represents the lever arm, according to K, of the elastic forces of restoration during the torsional loading of the single-storey/monosymmetric system. There are two different but equivalent ways to calculate the torsional radius of gyration.

A': The torsional radius of gyration arises directly from the relation $\rho_I = \sqrt{k_{III}/k_{II}}$, where k_{III} = the torsional stiffness of the single-storey system about the axis III, and k_{II} = the translational stiffness of it according to principal axis II.

B': The torsional radius of gyration (fig. 7γ) arises based on the ratio of special displacements (translational and twist angle) of the system from relation 3.5 where $u_{II} = F_{II}/k_{II}$ the displacement for static load force F_{II} at the point K (fig. 7a) and $\theta_z = (1 \cdot F_{II})/k_{III}$ the twist angle about K for torsional loading $M = 1 \cdot F_{II}$ of the system (fig. 7β).

In the case of the multi-storey and monosymmetric system it has been proved [17] that the torsional radius of gyration arises from relation 3.6. When the vector M of the positive torsional moments arises from $M = l \cdot F$ then the elimination of the ratio $B_{o,P}/M_{o,P}$ may be achieved by relation 3.6.

From an extended parametric analysis of equation (3.6) it arises that for every level ξ the torsional radius of gyration ρ_I of the frame-wall monosymmetric systems is not constant, but its value follows the distribution which is shown in the diagrams of figures 9a and 9β. We suggest that the torsional radius of gyration of the level $z = 0.8H$ is approximately equal to the torsional radius of gyration of the whole system.

Finally, it is noted that, if $\rho_{mx} = \sqrt{\rho_I^2 + e_{ox}^2}$ is the torsional radius of gyration expressed at the center of mass M of the system and it is true that $\rho_{mx} \leq r = \sqrt{J/m}$ or $\rho_{mx} \approx r$ then the system is characterised as torsionally flexible for dynamic translational excitation at base.

4. EQUIVALENT STATIC ECCENTRICITIES

For the location of the point of application of the lateral static seismic forces, the equivalent static eccentricities e_f, e_r are used, by use of the exact relations 5.1, by function of ρ_I and e_o [2]. To the e_f, e_r we add the accidental eccentricity e_{ti} . In the case of the double asymmetric system this procedure is applied for two its principal axes I, II.

5. ARITHMETIC EXAMPLE

5.1. Facts of the arithmetic example

In this paper we examined, using the F.E.M., the five-storey building of figure 11, which is made from reinforced concrete, with the asymmetric arrangement of the stiffness elements (fig. 11).

5.2. Application of the equivalent static method

From the analysis of the spatial system with the vector torsional moments $\mathbf{M}=l\cdot\mathbf{F}$ loading, the position of the optimum torsion axis is defined $P_o(X_p, Y_p) = (+10.036, +5.583)$. The principal directions x and y of the building are defined by the angle $\alpha=+6.44589^\circ$. The static eccentricities come up as $e_{ox} = 1.725m$ and $e_{oy} = 2.237m$. The uncoupled fundamental periods T_x, T_y of the system according to the directions x and y are $T_x = 0.773sec$ and $T_y = 0.797sec$. Consequently the final base shear according to the principal directions x and y are equal to:

$$V_{ox} = m_o \lambda \cdot R_d(T_x) = 6463.8 \text{ kN} = V_{oy}$$

The two torsional radii of gyration ρ_x, ρ_y of the five-storey building are calculated according to the principal directions x and y (fig. 11) and are $\rho_x = 8.73m, \rho_y = 8.41m$.

For the investigation of the torsional flexibility of the building we express the torsional radii of gyration by the real/fictitious elastic centre $P_o(X_p, Y_p)$ to the center of mass M of the building and we compare them with the radius of inertia r of the diaphragm [2], that is $\rho_{mx} = 8.90 < r = 9.70, \rho_{my} = 8.70 < r = 9.70$.

Since one at least torsional radius of gyration is smaller than the radius of inertia of the diaphragm, the building is **torsionally flexible** for dynamic loading [2], [12], [13].

The design eccentricities for the final solutions with the lateral static seismic forces F_x measured by P_o are:

$$\max e_y = e_{f,y} + e_{\tau,y} = 5.636 + 0.924 = 6.56 \text{ m}$$

$$\min e_y = e_{r,y} - e_{\tau,y} = 0.178 - 0.924 = -0.75 \text{ m}$$

The design eccentricities for the final solutions with the lateral static seismic forces F_y measured by P_o are:

$$\max e_x = e_{f,x} + e_{\tau,x} = 5.40 + 1.233 = 6.633 \text{ m}$$

$$\min e_x = e_{r,x} - e_{\tau,x} = -1.065 - 1.233 = -2.298 \text{ m}$$

Having known the final design eccentricities, the four final separate static solutions of the system are taking place (fig. 11). Finally the spatial superposition of the results of the

previous solutions takes place with the creation of the following four states of extreme static loading of the system:

- Extreme Loading States 1 (1st with 3rd solution).
- Extreme Loading States 2 (1st with 4th solution).
- Extreme Loading States 3 (2nd with 3rd solution).
- Extreme Loading States 4 (2nd with 4th solution).

The total stress or displacement for each extreme loading is calculated with the rule of the quadratic superposition of the partial stresses or displacements of the combined solutions.

5.3. Application of the Dynamic Spectral Method

For the action of the modal analysis of the system firstly we consider that the mass $m = 756.t$ of each floor is concentrated at the geometric centre of each diaphragm. The mass moment of inertia of the diaphragm around the vertical axis that goes through the center of the mass is $J_m = 71127.\text{tm}^2$.

From the modal shape vectors (i) we can calculate the coordinates (e_{xi}, e_{yi}) of the centers of vibration O_i of the floors from the relations 6.1. When the vibration centres according to the first or second modal shape fall into the circle of the radius of inertia of the diaphragm (fig. 13) then this means that the system is torsionally flexible that is, for the pure translational excitation the torsional vibrations of the diaphragm dominate the translational vibration. This is exactly what happens in the example which we examine.

5.3.2. Dynamic spectral solution. Spatial superposition

By considering the masses concentrated - at the geometrical centre of each diaphragm we can make a dynamic spectral calculation for pure translational excitation for each direction x and y separately. The superposition of the modal responses is done using the CQC method, by taking into account all the modal shapes of the system, that is the 100% of the effective masses.

In this paper, for the reception of the accidental eccentricity, the additional static loading of positive torsional moments is chosen, acting this way separately from the static torsional loadings of relations 6.2 on each floor.

5.4. Comparison of Results

In figures 13, 14 and 15 one can see the final diagrams of the spatial superposition of the moments of bend

$$(M_\xi, M_\eta)$$

from the equivalent static method of the anti-seismic analysis on the columns 1 and 30 which are found on the corner of the stiff and flexible side of the building accordingly.

In parentheses one can see the relevant values according to the Dynamic Spectral Method as was applied in 6.3.2. The diagram of moments of bend is also given on the wall 24. We observe that despite the fact that the examining building is highly torsionally flexible, the substantiate application of the equivalent static method by use of the optimum torsion axis and of the equivalent static eccentricities envelopes the corresponding response of the dynamic spectral method.

6. CONCLUSIONS

In this paper there was an investigation/presentation of the qualities of the optimum torsion axis of the frame-wall multi-storey buildings using the continuous model of the structure. The optimum torsion condition is always possible in all frame-wall multi-storey systems and for this reason the relevant axis can substitute for the vertical elastic axis, having the same role as the latter. The definition of the torsional radius of gyration in multi-storey frame-wall systems was given.

The substantiated equivalent static method was applied in an illustrative way to a torsionally flexible five-storey asymmetric building based on the recent relevant research studies [12], [13], [2]. The optimum torsion axis of the building was used, its principal directions, the static eccentricity, the torsional radii of gyration and the equivalent static eccentricities. The results that arose were compared with those of the dynamic spectral method. The theoretical analysis [12], [13], [17], [2] was also confirmed arithmetically in the example which was examined, since it was shown that the extension of the equivalent static method is possible even to highly torsionally flexible buildings.

Finally specific criteria of torsional flexibility were presented (see §4, §6.2.2 and §6.3.1) with a specific procedure of calculation accordingly.