

# Υπολογιστικός Έλεγχος της Ταλάντωσης Ξύλινων Πατωμάτων σε Ιστορικά Κτίρια

**N.K. XATZHTRYFΩΝ**

Δρ πολιτικός μηχανικός, 4<sup>η</sup> ENM / ΥΠ.ΠΟ.

## Περίληψη

Καταγράφονται οι απαιτούμενες αρχές λειτουργικότητας των ιστορικών ξύλινων πατωμάτων σχετικά με την ταλάντωση και περιγράφονται ορισμένες μέθοδοι κατασκευής τους. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται οι μαθηματικές σχέσεις της φυσικής συχνότητας δοκών και ορθότροπων πλακών με - και χωρίς - νευρώσεις ενίσχυσης (δοκούς). Διατυπώνεται σχέση για την ιδιοσυχνότητα πατώματος που αποτελείται από ορθότροπη πλάκα συνδεόμενη με δοκούς. Η σχέση αντή παρέχει ανζημένες ιδιοσυχνότητες για το πάτωμα σε σχέση με τις λίστες για τις δοκούς. Σχολιάζεται η μαθηματική έκφραση της φυσικής συχνότητας που χρησιμοποιεί ο Ευρωκώδικας 5 και η οποία αναφέρεται σε ισότροπες δοκούς, καθώς και το συνοδευτικό κείμενο της σχέσης αντής, στο οποίο ορίζεται τα πατώματα να είναι διαμορφωμένα ως περιμετρικά αρθρωτά εδραζόμενες πλάκες. Ωστόσο, στα ιστορικά κτίρια δύσκολα μπορεί να υλοποιηθεί ο όρος για περιμετρική έδραση για το μοντέλο των παράλληλων δοκών. Η επιταγή του EK 5 να λαμβάνονται υπόψη μόνον οι μόνιμες δράσεις για τον προσδιορισμό της μάζας ταλάντωσης αυξάνει την υπολογιζόμενη ιδιοσυχνότητα, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε υποτίμηση των κινδύνων συντονισμού. Προτείνεται να υπολογιζεται η ταλάντωση των ξύλινων ιστορικών πατωμάτων βάσει της ακριβέστερης προσομίωσης, που διατυπώνεται στην παρούσα εργασία.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αλλαγές χρήσης και τροποποιήσεις των εσωτερικών χώρων των ιστορικών κτίριων καθιστούν επιβεβλημένο τον έλεγχο της ταλάντωσης των πατωμάτων τους. Ιστορικά κτίρια που μετατρέπονται σε κτίρια κοινής ωφέλειας απαιτούν ακριβή προσομοίωση και υπολογισμό, ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις για ασφαλή συμπεριφορά του κτίριου, αλλά συγχρόνως οι επεμβάσεις πρέπει να είναι οι ελάχιστες δυνατές.

Ο ακριβής υπολογισμός της ταλάντωσης των ξύλινων πατωμάτων στα ιστορικά κτίρια προϋποθέτει μια σύνθετη και επίπονη προσομοίωση. Για το λόγο αυτό τα πατώματα συχνά θεωρούνται ως σύστημα μη συνεργαζόμενων παράλληλων αμφιέρειστων δοκών. Όμως, αυτή η προσέγγιση παρέχει ιδιοσυχνότητες μικρότερες από τις πραγματικά εμφανιζόμενες και έτσι υπερτιμά τον κίνδυνο ταλάντωσης λόγω ανθρώπινης δραστηριότητας. Αυτό το αποτέλεσμα

μπορεί να οδηγήσει σε άσκοπες ενισχύσεις ή στην αντικατάσταση των ξύλινων πατωμάτων.

Ωστόσο, η προσομοίωση των ξύλινων πατωμάτων ως ισότροπων πλακών παρέχει αποτελέσματα, τα οποία δίδουν υψηλότερες τιμές ιδιοσυχνοτήτων από την πραγματικότητα. Αυτό συμβαίνει, διότι η εγκάρσια προς τις δοκούς ενίσχυση (σανίδωμα του δαπέδου, εγκάρσια δοκός αντιστρήιξης, ενδιάμεσες δοκοί σύσφιγξης, σύνδεσμοι δυσκαμψίας) δημιουργεί κατασκευαστική ανισότροπη συμπεριφορά, η οποία όμως υπολείπεται από τη λειτουργία μιας ενιαίας πλάκας.

Επομένως, η προσομοίωση του πατώματος αφ' ενός ως συστήματος δοκών και αφ' ετέρου ως ενιαίας ορθότροπης πλάκας εκφράζει δύο ακραίες περιπτώσεις μεταξύ των οπίων βρίσκεται η πραγματικότητα.

Σχετικά με τις επεμβάσεις στην υφιστάμενη κατασκευή, η ενίσχυση της λειτουργικότητας του πατώματος γίνεται με τη δημιουργία ενός οικονομικού φορέα: οι εδράσεις είναι αρθρώσεις ή μερικώς πακτωμένες και αποφεύγονται οι κυλήσεις. Επίσης, μπορεί να τροποποιηθεί το στατικό σύστημα, π.χ. με τη δημιουργία ενδιάμεσων στηρίξεων.

Εκτός από την αναλυτική διατύπωση των ιδιοσυχνοτήτων μιας δοκού [1, 2] και μιας ορθότροπης πλάκας [3], η ταλάντωση μπορεί να υπολογιστεί με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή πειραματικά [4]. Από πλευράς κανονισμών, ο Ευρωκώδικας 5 (EK 5) [5] προσφέρει εξισώσεις υπολογισμού των ιδιοσυχνοτήτων και συνοδευτικούς όρους, ώστε να εξασφαλίζεται ικανοποιητική λειτουργικότητα της κατασκευής. Ας υπενθυμιστεί ότι τόσο ο Ελληνικός Κανονισμός Ξύλινων Κατασκευών [6] όσο και ο μόνος ξένος κανονισμός που μεταφράστηκε στα ελληνικά, ο DIN 1052/1969 [7], όπως και η τροποποίησή του [8], δεν αναφέρονται στην ταλάντωση, την οποία μόνον εμμέσως λαμβάνουν υπόψη τους μέσω του βέλους βύθισης. Έτσι, ο EK 5 αποκτά ιδιαίτερη σημασία, ιδιαίτερα μετά την έκδοση των σχετικών εγκυκλίων του Υ.ΠΕ.ΧΩ.Δ.Ε. [9, 10].

Η παρούσα εργασία, αφού παρουσιάσει ορισμένα παραδείγματα κατασκευής ιστορικών ξύλινων πατωμάτων, προτείνει μια ακριβέστερη προσομοίωση και υπολογισμό βα-

σισμένο στην ανάλυση της ταλάντωσης ορθότροπου δαπέδου (πλάκας), η οποία είναι συνδεδέμενη ενδοτικά με δοκούς. Στη συνέχεια, διερευνά την εφαρμοσιμότητα του EK 5 σε ιστορικά πατώματα. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται συνθήκες για την ικανοποιητική λειτουργικότητα των ιστορικών πατωμάτων. Στο κεφάλαιο 4 δίδονται οι ιδιοσυχνότητες ορθότροπων πλακών. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται και σχολιάζεται το σχετικό κεφάλαιο του EK 5 και στο κεφάλαιο 6 προτείνονται μαθηματικές σχέσεις και νέες λύσεις για τις ιδιοσυχνότητες των ιστορικών πατωμάτων. Τέλος, στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα.

## 2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

### 2.1. Λατινικοί κεφαλαίοι χαρακτήρες

A	επιφάνεια διατομής
C	σταθερά
D	δυσκαμψία
E	μέτρο ελαστικότητας
F	δύναμη διέγερσης
G	μέτρο διάτμησης
J	ροπή αδράνειας επιφάνειας δοκού
K	μέτρο ολίσθησης συνδετήρα
L	τελεστής
M	ροπή
N	πλήθος παράλληλων δοκών (=b/e-1)
R	δύναμη αντίδρασης
T	συνάρτηση με μεταβλητή το χρόνο t
W	συνάρτηση με μεταβλητές x, y

### 2.2. Λατινικοί πεζοί χαρακτήρες

a	πλάτος πλάκας κατά τον άξονα x (=μήκος δοκού l)
b	μήκος πλάκας κατά τον άξονα y
c	λόγος πλάτους προς μήκος πλάκας (=a/b)
d	πλάτος διατομής δοκού
e	απόσταση μεταξύ των νευρώσεων (δοκών)
f	συχνότητα
g	επιτάχυνση βαρύτητας
h	πάχος δαπέδου (σανιδώματος) ή ύψος δοκού
i, j	σταθερές, ακέραιοι αριθμοί
k	ακέραιος αριθμός, βαθμός ταλάντωσης
l	μήκος δοκού (=a)
m	μάζα
q	φορτίο
s	απόσταση μεταξύ των ήλων
t	χρόνος
w	βύθιση κατά τον άξονα z
x	άξονας του επιπέδου της πλάκας ή άξονας δοκού
y	άξονας του επιπέδου της πλάκας
z	άξονας εγκάρσιος προς το επίπεδο της πλάκας

### 2.3. Ελληνικοί πεζοί χαρακτήρες

α	συντελεστής μείωσης δυσκαμψίας
β	συντελεστής μείωσης της ροπής αδράνειας Steiner
γ	ειδικό βάρος
ζ	απόσβεση
ν	λόγος του Poisson
ψ	στατική ροπή δοκού
ω	κυκλική συχνότητα

### 2.4. Δείκτες

//	παραλλήλως προς τις ίνες του ξύλου
⊥	καθέτως προς τις ίνες του ξύλου
1-3	κύριες διευθύνσεις ελαστικότητας υλικού
δ	δοκός
κ	κορμός σύνθετης διατομής
μφ	μακρόχρονα φορτία
π	πάτωμα
σ	σανίδωμα / δάπεδο
υ	υποθετικός

### 2.5. Εκθέτες

δ	νεύρωση
Δ	περιμετρικά αρθρωτή πλάκα
Γ	περιμετρικά πακτωμένη πλάκα

## 3. ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΤΗΤΑ - ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

### 3.1. Λειτουργικότητα

Ο βηματισμός των ανθρώπων προκαλεί εγκάρσια ταλάντωση συχνότητας 1 έως 5 Hz, ενώ ο χορός και οι μηχανές δημιουργούν ισχυρές ταλάντωσεις, ακόμη και συντονισμό. Η συνειδητοποίηση της ταλάντωσης από τον άνθρωπο επηρεάζεται από τις εξής παραμέτρους [11, 12]:

- α) την επιτάχυνση (σε συχνότητες μικρότερες των 8 Hz) και την ταχύτητα (σε συχνότητες μεγαλύτερες των 8 Hz),
- β) το χρόνο ταλάντωσης και
- γ) την απόσταση της πηγής ταλάντωσης και τη σωματική δραστηριότητα του ατόμου.

Διαγράμματα και συναρτήσεις δίνουν τιμές επιτάχυνσης για την επίτευξη ευχάριστης παραμονής [13]:

- Οι βρετανικοί κανονισμοί [14] σχετίζουν την επιτάχυνση  $d^2w/dt^2$  με τη συχνότητα f:

$$d^2w/dt^2 = 0.5 f^{0.5} \text{ σε (m/s}^2\text{)} \quad (3.1)$$

Για  $f=8\text{Hz}$ , τιμή οριακή για τον EK 5, η αντίστοιχη επιτρεπτή επιτάχυνση είναι  $1.4\text{ m/s}^2$ .

- Ο γερμανικός κανονισμός DIN 4150 [15] δίδει καμπύλες ίδιου βαθμού αντίληψης. Για  $f=8\text{Hz}$  η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι  $0.6\text{m/s}^2$ .

Ο ΕΚ 5 εξετάζει χωριστά την ταλάντωση σε κτίρια και σε γέφυρες [16].

### 3.2. Τρόποι κατασκευής

Τα ξύλινα πατώματα στα ιστορικά κτίρια συνήθως έχουν ορθογωνική κάτοψη, αποτελούνται από σύστημα παράλληλων δοκών σε απόσταση περίπου 0,65m, αμφιέρειστα εδρασμένες ως κυλίσεις (δηλαδή με δυνατότητα οριζόντιας μετατόπισης), με καρφωμένο σανίδωμα πάχους άνω των 24mm, το οποίο δημιουργεί αμφιέρειστες πλάκες. Συναντώνται επίσης: α) αρθρώσεις ως έδραση (μεταλλικές αγκυρώσεις στη λιθοδομή, σύνδεση με τις δοκούς γειτονικού χώρου κ.ά., βλέπε εικόνα 1, σχήματα 1 και 2), β) εγκάρσιες συνδέσεις δοκών σε όλη την επιφάνεια του πατώματος (σχήματα 3 και 4), γ) εγκάρσια δοκός αντιστρίξης στο μέσον του ανοίγματος των παράλληλων δοκών που μειώνει το ελεύθερο άνοιγμά τους. Στην περίπτωση αυτή, η συνεργασία των παράλληλων δοκών με τη δοκό αντιστρίξης εξασφαλίζεται, αν η βύθισή τους στο σημείο επαφής είναι ίση [17]:

$$w_0 + w_1 = w_2 \quad (3.2)$$

όπου  $w_0$  είναι η βύθιση των δοκών λόγω του εξωτερικού φορτίου,  $w_1$  είναι η βύθιση των δοκών λόγω μιας κατ' αρχήν άγνωστης δύναμης  $R(w)$  και  $w_2$  είναι η βύθιση της εγκάρσιας δοκού αντιστρίξης λόγω της  $R(w)$ . Ανάλογη συνθήκη με τη σχέση (3.2) ισχύει, όταν υπάρχουν εγκάρσιες δοκοί περισσότερες της μίας. Η συνθήκη αυτή δεν εξασφαλίζει την ανάπτυξη ροπών και διατμητικών τάσεων στο συνολικό ύψος της πλάκας: αντές, στην κατεύθυνση κάθε άξονα, παραλαμβάνονται από τις δοκούς της αντίστοιχης κατεύθυνσης.

Στα σύγχρονα κτίρια κατασκευάζονται σχάρες (πλάκες) από δοκούς συνεπίπεδες ή σε περισσότερα επίπεδα, οι οποίες είναι διέρειστες, τριέρειστες ή τετραέρειστες. Οι συνεπίπεδες δοκοί πρέπει να συνδέονται σε κάθε κόμβο με περισσότερα μέσα σύνδεσης σε κατάλληλη διάταξη και με διατομή ικανή να παραλάβει τις ροπές. Η διάταξη των δοκών καθορίζεται με τεχνικο-οικονομικά κριτήρια [18].

Για να αποφευχθεί συντονισμός της κατασκευής, η φυσική συχνότητα του πατώματος πρέπει να διαφέρει από την ταλάντωση, την οποία προκαλούν οι καθημερινές δραστηριότητες (βηματισμός κ.λπ.) αλλά και ο σεισμός. Επομένως, κάθε επέμβαση θα πρέπει να μειώνει τον κίνδυνο συντονισμού. Μια διαφορά 20% μεταξύ φυσικής συχνότητας και συχνότητας διέγερσης θεωρείται ικανοποιητική [19]. Κατασκευαστικές ρυθμίσεις, που μειώνουν τον κίνδυνο ταλάντωσης και συγχρόνως συνεισφέρουν στη διαφραγματική λειτουργία του πατώματος, δίδονται στις εικόνες 1 και 2 και στα σχήματα 1 έως 4.



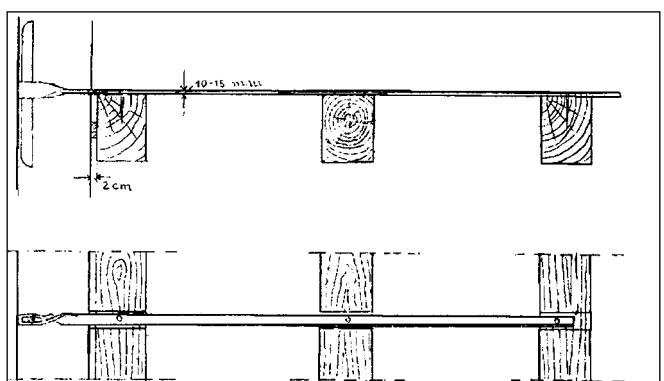
Εικόνα 1: Ιστορικό κτίριο «Καπναποθήκη» στην Καβάλα, οδός Φιλίππου 12 (αρχείο 4ης ENM). Πολύ προσεγμένη κατασκευή, όπως στο σχήμα 2 (άρθρωση).

Picture 1: Historical building «Tobacco warehouse» in Kavala, 12, Filippou str. (Archive of the 4<sup>th</sup> ENM / The Hellenic Ministry of Culture). Very carefully constructed, see also fig. 2.



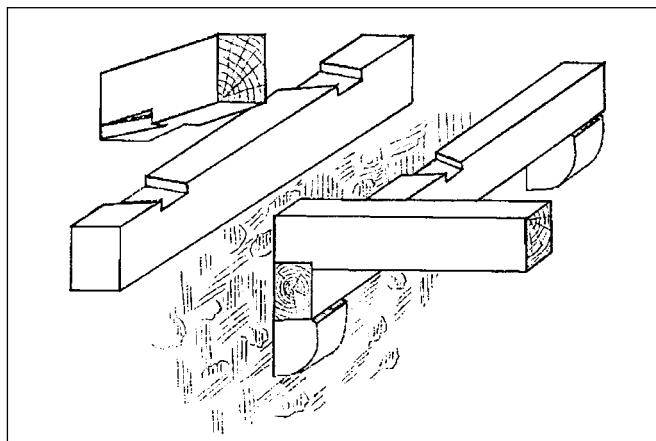
Εικόνα 2: Ιστορικό κτίριο «Καλογερικό» στη Θάσο, Λιμένα (αρχείο 4ης ENM, φωτογρ.: A. Μέντζα). Πολύ προσεγμένη κατασκευή, (μερική) πάκτωση δοκού.

Picture 2: Historical building «Kalogeriko» in Thasos, Limenas (Archive of the 4<sup>th</sup> ENM / The Hellenic Ministry of Culture, photo: A. Mentza). Very carefully constructed; fixed end of the beam.



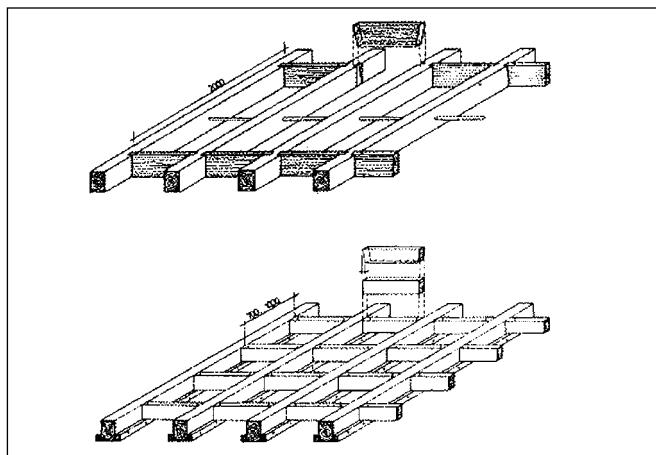
Σχήμα 1: Κατασκευαστικές διατάξεις που μειώνουν τον κίνδυνο ταλάντωσης (όψη και κάτοψη) [19].

Figure 1: Construction details minimizing the danger of vibration [19].



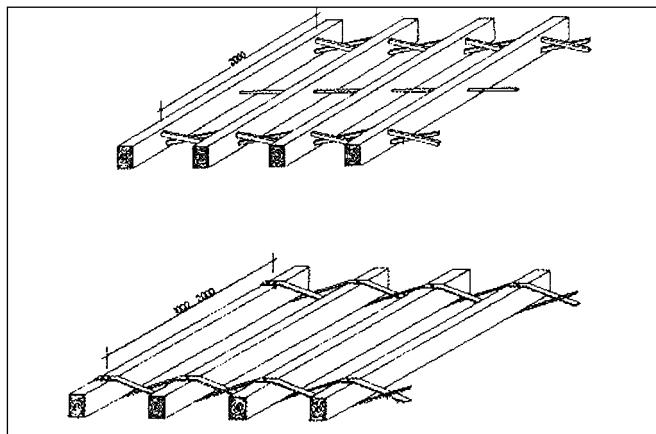
Σχήμα 2: Κατασκευαστικές διατάξεις που περιορίζουν την ταλάντωση [20] (παράβαλε εικόνα 1).

Figure 2: Construction details minimizing the vibration [20] (to compare with picture 1).



Σχήμα 3: Κατασκευαστικές διατάξεις που περιορίζουν την ταλάντωση και συνεισφέρουν στη διαφραγματική λειτουργία [19].

Figure 3: Constructions minimizing the danger of vibration and enforcing the diaphragmatic behaviour of the floor [19].



Σχήμα 4: Κατασκευαστικές διατάξεις που μειώνουν την ταλάντωση [19].

## 4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

### 4.1. Ισότροπη δοκός

Η ιδιοσυχνότητα προκύπτει από την ανάλυση της διαφορικής σχέσης ισότροπης δοκού μήκους  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ) [1]:

$$E_{/\delta} J_\delta d^4w/dx^4 + m_\delta d^2w/dt^2 + \zeta dw/dt = F(x,t) \quad (4.1)$$

η οποία για απόσβεση  $\zeta=0$  και διέγερση  $F(x,t)=0$  ανάγεται στην:

$$E_{/\delta} J_\delta d^4w/dx^4 + m_\delta d^2w/dt^2 = 0 \quad (4.2)$$

Άλση της σχ. (4.2) αποτελεί η εξίσωση:

$$w(x,t) = W(x) T(t) \quad (4.3)$$

με  $W(x) = (C_1 \cos X + C_2 \sin X + C^3 \cosh X + C_4 \sinh X)$ ,  
 $T(t) = (C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t)$ ,  $X = x(k\pi/l)^{0.25} = x(m_\delta \omega^2/E_{/\delta} J_\delta)^{0.25}$   
και ω είναι η κυκλική συχνότητα ( $\omega = 2\pi f$ ).

Οι σταθερές ολοκλήρωσης  $C_j$  ( $j=1$  έως 6) ορίζονται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση της συχνότητας της δοκού για τις βασικότερες περιπτώσεις έδρασής της προκύπτει ως εξής [1]:

- πάκτωση-ελεύθερο άκρο:  $1 + \cos(k_{1,j}=\pi) \cosh(k_{1,j}\pi) = 0$   
(λύση:  $k_{1,j=1} = 0.597$ )  $(4.4\alpha)$

- άρθρωση-άρθρωση:  $\sin(k_{2,j}\pi) = 0$   
(λύση:  $k_{2,j=1}=1, k_{2,j=2}=2, k_{2,j=3}=3, \dots$ )  $(4.4\beta)$

- πάκτωση-άρθρωση:  $\tan(k_{3,j}\pi) - \tanh(k_{3,j}\pi) = 0$   
(λύση:  $k_{3,j=1}=1.25, k_{3,j=2}=2.50, k_{3,j=3}=3.25, \dots$ )  $(4.4\gamma)$

- πάκτωση-πάκτωση:  $1 - \cos(k_{4,j}\pi) \cosh(k_{4,j}\pi) = 0$   
(λύση:  $k_{4,j=1}=1.506, k_{4,j=2}=2.50, k_{4,j=3}=3.50, \dots$ )  $(4.4\delta)$

όπου  $j$  σημαίνει το βαθμό της ιδιοσυχνότητας. Η ιδιοσυχνότητες δίδονται από τη σχέση:

$$f_{\delta,i,j} = \omega_{i,j}/2\pi = (\pi/2)(k_{ij}/l)^2 (E_{/\delta} J_\delta/m_\delta)^{0.5} \quad (4.5\alpha)$$

Για αμφιαρθρωτή δοκό η βασική ιδιοσυχνότητα είναι:

$$f_{\delta2,1} = \pi/(2l^2) (E_{/\delta} J_\delta/m_\delta)^{0.5} \quad (4.5\beta)$$

Η ταλάντωση μιας δοκού βρίσκεται προσεγγιστικά, αν θεωρηθεί η μάζα  $m_\delta$  του συστήματος ως συγκεντρωμένη στο σημείο επιβολής ενός υποθετικού φορτίου  $F_v$ . Η ιδιοσυχνότητα προκύπτει τότε ως:

$$f_{\delta2,1} = [C/(4\pi^2 m_\delta)]^{0.5} \quad (4.6)$$

όπου  $C$  είναι η σταθερά του ισοδύναμου ελατηρίου-δοκού και το φορτίο  $F_v$  προκαλεί βέλος βύθισης  $w_v$  ( $C = F_v/w_v$ ).

Για υψίκορμες δοκούς μικρού μήκους και δοκούς σύνθετης διατομής μορφής  $T$  ή  $H$ , η βύθιση επηρεάζεται από τις διατμητικές τάσεις σύμφωνα με τη σχέση [8]:

$$w_{max} = q l^4 / (8 G_{/\perp} A_k) \quad (4.7)$$

όπου  $q$  είναι ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο,  $A_k$  είναι η διατομή του κορμού και  $G_{/\perp}$  είναι το μέτρο διάτμησης

(παράλληλα προς τις ίνες του ξύλου) που εκφράζει την αλλαγή των γωνιών μεταξύ των κυρίων διευθύνσεων  $x$  και  $z$  ( $G_{//\perp}=G_{12}=\tau_{xz}/\gamma_{xz}$ ).

Για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο σε δοκό ορθογωνικής διατομής  $dh_\delta$  προκαλείται μέγιστη βύθιση [3]:

$$w_{max} = 5ql^4/(24E_{//}J_\delta) + qdl^2[-3(v_{//\perp}/E_{//}) + 4G_{//\perp}]/(80J_\delta) \quad (4.8)$$

Ο λόγος των βυθίσεων λόγω διάτμησης και κάμψης είναι [21]:

$$w_\tau / w_\sigma = 0,96 (E_{//}/G_{//\perp}) (h_\delta/l)^2 \quad (4.9)$$

Για την αμφιαρθρωτή ισότροπη δοκό με μάζα συγκεντρωμένη στο μέσο του ανοίγματος ισχύει [1]:

$$C = 48EJ_\delta/l^3 \quad (4.10)$$

Αντίστοιχες είναι οι τιμές για άλλες οριακές συνθήκες στην ισότροπη δοκό. Η μέθοδος της ισοδύναμης σταθεράς δοκού-ελατηρίου εκφράζει την επίδραση των διατμητικών τάσεων στη διαμόρφωση της ιδιοσυχνότητας.

Η σχ. (4.5a) εφαρμόζεται σε ξύλινα πατώματα, όταν αυτά αποτελούνται από σύστημα παράλληλων δοκών συνδεδεμένων μεταξύ τους με σανίδωμα (δάπεδο). Όταν προβλέπονται κατασκευαστικές ενισχύσεις (εγκάρσιες δευτερεύουσες δοκοί, καλά καρφωμένες σανίδες δαπέδου) έτσι, ώστε το πάτωμα να μπορεί να θεωρηθεί ως πλάκα, η διδιάστατη δυναμική ανάλυση δίδει ακριβέστερα αποτελέσματα (υψηλότερες ιδιοσυχνότητες).

## 4.2. Λεπτές πλάκες

Εξετάζεται μια ορθότροπη πλάκα ορθογωνικής κάτοψης  $ab$  ( $a \leq b$ ,  $a=l$ ) σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h/2 \leq z \leq h/2$ ) με αντίστοιχες μετατοπίσεις:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Οι άξονες συμπίπτουν με τις κύριες διευθύνσεις (1, 2, 3) της ελαστικότητας. Για εξωτερικό φορτίο  $q(x,y)=0$  κάθετο στο επίπεδο  $x-y$  της πλάκας, η συνάρτηση της κίνησης δίδει [3]:

$$m \partial^2 w / \partial t^2 + Lw = 0 \quad (4.11)$$

$$L = D_1 \partial^4 / \partial x^4 + 2D_3 \partial^4 / \partial x^2 \partial y^2 + D_2 \partial^4 / \partial y^4$$

όπου  $w=w(x,y,z=0,t)$  είναι η βύθιση,  $m=h/g$  είναι η μάζα της πλάκας και

$$D_1 = E_1 h^3 / [12(1-v_{12}v_{21})] \quad D_2 = E_2 h^3 / [12(1-v_{12}v_{21})]$$

$$D_3 = D_1 v_{21} + G_{12} h^3 / 6 \quad (4.12)$$

με  $E_1=E_{\perp}$  και  $E_2=E_{//}$  και  $G_{12}=G_{\perp//}=G_{13}$  ( $G_{12}=\tau_{xy}/\gamma_{xy}$ ). Ο λόγος του Poisson  $v_{ij}$  ( $i, j=1,2,3$ ) εκφράζει την εγκάρσια συστολή στη διεύθυνση  $j$ , όταν εφαρμόζεται εφελκυσμός στη διεύθυνση  $i$ . Λόγω συμμετρίας του μητρώου του γενικευμένου νόμου του Hooke ( $\epsilon=C\sigma$ ), ισχύει:

$$E_1 v_{21} = E_2 v_{12}, E_2 v_{32} = E_3 v_{23}, E_3 v_{13} = E_1 v_{31}$$

Σε αναλογία προς τις ισότροπες πλάκες με ισότροπες νευρώσεις [3], είναι δυνατόν να διατυπωθεί ως εξής η δυσκαμψία  $D_1$  στις ορθότροπες πλάκες με ισότροπες δοκούς (παράλληλες προς τον άξονα  $x$ ):

$$D_1'' = E_2 \sigma h_\sigma^3 / [12(1-v_{12}v_{21})] + E_\delta J_\delta / e \quad (4.13)$$

όπου  $E_\delta=E_{//}$  είναι το μέτρο ελαστικότητας των νευρώσεων (δοκών),  $J_\delta$  είναι η ροπή αδράνειας της νεύρωσης, ε είναι η απόσταση μεταξύ των νευρώσεων και τα μεγέθη  $E_2$  και  $h_\sigma$  αναφέρονται στο σανίδωμα. Για αμελητέα συνεισφορά του σανιδώματος ( $h_\sigma \ll h_\delta$ ,  $h \approx h_\delta$ ) προκύπτει:

$$D_1'' = E_\delta J_\delta / e \quad (4.14)$$

οπότε η σχ. (4.11) παίρνει τη μορφή:

$$m \partial^2 w / \partial t^2 + (E_\delta J_\delta / e) \partial^4 w / \partial x^4 = 0 \quad (4.15)$$

Για  $m=m_\delta$  η σχ. (4.15) ταυτίζεται με τη συνάρτηση κίνησης της δοκού (σχ. (4.2)).

Η γενική λύση των Daniel-Bernoulli της σχ. (4.11) είναι [3]:

$$w = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) W(x,y) \quad (4.16)$$

και η σχ. (4.11) γράφεται:

$$LW - f^2 m W = 0 \quad (4.17)$$

Για μηδενική ορίζουσα υπάρχει λύση διάφορη του μηδενός.

Για εδράσεις διαμορφωμένες ως αρθρώσεις, οι οριακές καταστάσεις είναι [3]:

$$\text{για } x=0, x=a: W=0 \Rightarrow M_x = -D_1 (\partial^2 W / \partial x^2 + v_{21} \partial W / \partial y^2) = 0$$

$$\text{για } y=0, y=b: W=0 \Rightarrow M_y = -D_2 (\partial^2 W / \partial y^2 + v_{12} \partial W / \partial x^2) = 0 \quad (4.18)$$

Τις συνθήκες αυτές ικανοποιεί η σχέση (λύση) [3]:

$$W_{ij} = \sin(i\pi x/a) \sin(j\pi y/b) \quad (4.19)$$

όπου  $i, j$  είναι ακέραιοι αριθμοί. Ενσωματώνοντας τη σχ. (4.19) στη σχ. (4.17), προκύπτει [3]:

$$(i\pi/a)^4 D_1 + 2(ij/ab)^2 D_3 + (j\pi/b)^4 D_2 - \omega_{ij}^2 m = 0 \quad (4.20)$$

Από τη σχ. (4.20) προκύπτει η θεμελιακή ιδιοσυχνότητα  $f_{11}^\Delta$  και οι συγχότητες υψηλότερων αρμονικών  $f_{ij}^\Delta$  [3]:

$$f_{11}^\Delta = \pi / (2a^2) (D_0 / m)^{0.5} \quad D_0 = D_1 + 2c^2 D_3 + c^4 D_2 \quad (4.21\alpha)$$

$$f_{ij}^\Delta = \pi / (2b^2) (D_{0,ij} / m)^{0.5} \quad D_{0,ij} = (i/c)^4 D_1 + 2j^2(i/c)^2 D_3 + l^4 D_2$$

$$c = a/b \quad (4.21\beta)$$

όπου ο δείκτης  $i$  αναφέρεται στο βαθμό της ιδιοσυχνότητας στη διεύθυνση  $x$ , ο δείκτης  $j$  στη διεύθυνση  $y$  και ο εκθέτης  $\Delta$  σημαίνει την περιμετρική άρθρωση της πλάκας.

Με την προσεγγιστική μέθοδο Rayleigh-Ritz υπολογίζεται η ιδιοσυχνότητα των ορθογωνικών περιμετρικά πακτωμένων πλακών [3]. Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$W_{ij} = (x^2 - a^2/4)^2 (y^2 - b^2/4)^2 x^i y^j, \quad -a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b \quad (4.22)$$

προκύπτει ως βασική φυσική συχνότητα:

$$f_{11} = 3,58/a^2 (D_1 + 0,571 D_3 c^2 + D_2 c^4)^{0.5} m^{-0.5} \quad (4.23)$$

όπου ο εκθέτης  $\Gamma$  σημαίνει περιμετρική πάκτωση.

Συγκρίνοντας τις σχ. (4.21) και (4.23) προκύπτει ότι:

- α) η συχνότητα της περιμετρικά πακτωμένης πλάκας είναι σχεδόν διπλάσια από αυτήν της περιμετρικά αρθρωτής και
- β) το μέτρο διάτμησης συνεισφέρει λιγότερο στην τιμή της ιδιοσυχνότητας της περιμετρικά πακτωμένης πλάκας από ό,τι στην ιδιοσυχνότητα της περιμετρικά αρθρωτής.

Όταν δρα ένα φορτίο  $q(x,y,t)$  κάθετο στο επίπεδο  $x-y$  της πλάκας, τότε η σχ. (4.11) αποκτά τη μορφή [3]:

$$\partial^2 w / \partial t^2 + 1/m Lw = q(x,y,t) g/(hg) \quad (4.24)$$

η οποία θα πρέπει να ικανοποιεί τις αρχικές και οριακές συνθήκες. Έστω ότι  $q=q_0(x,y) \cos \Omega t$ . Όταν η συχνότητα  $\Omega$  αποκτήσει τη συχνότητα μίας από τις ιδιοσυχνότητες της πλάκας, τότε θα δημιουργηθεί συντονισμός.

Από τις σχ. (4.21) και (4.23) προκύπτει ότι η ιδιοσυχνότητα πατώματος χωρίς σανίδωμα ( $h_\sigma=0$ ) είναι μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα μιας πλάκας με σανίδωμα ( $h_\sigma \neq 0$ ):

$$f(h_\sigma=0) < f(h_\sigma \neq 0) \quad (4.25)$$

## 5. Η ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΚΑΤΑ ΤΟΝ ΕΥΡΩΚΩΔΙΚΑ 5

Ο EK 5 [5] εξετάζει την κατηγορία A (πίνακας 6.1) του EK 1 [22], η οποία αφορά σε χώρους κτίριων διαμονής / κατοικίες, χώρους / θαλάμους νοσοκομείων, υπνοδωμάτια ξενοδοχείων, κουζίνες / τουαλέτες. Για διεγέρσεις λόγω συνηθισμένων ανθρώπινων δραστηριοτήτων, η βασική ιδιοσυχνότητα για μια ξύλινη ορθογωνική πλάκα περιμετρικά εδρασμένη με αρθρώσεις είναι:

$$f_1 = \pi/(2a^2) [(EI)_a/m]^{0.5} \quad (5.1)$$

όπου  $m$  είναι η μάζα ανά μονάδα επιφάνειας ( $kg/m^2$ ), α είναι το μήκος της πλάκας σε (m) και  $(EI)_a$  είναι η ισοδύναμη δυσκαμψία της πλάκας σε ( $Nm^2/m$ ) ως προς έναν άξονα κάθετο στην κατεύθυνση των δοκών.

Η σχ. (5.1) ταυτίζεται με τη σχ. (4.5β) και προκύπτει από την έκφραση της k-οστής φυσικής συχνότητας [11]:

$$f_n = f_1 [1+k^4(a/b)^4(EI)_b/(EI)_a]^{0.5} \quad (5.2)$$

Επίσης, παρέχονται σχέσεις υπολογισμού της ταχύτητας  $dw/dt$  (της μέγιστης αρχικής τιμής της εγκάρσιας ταλά-

ντωσης της πλάκας σε m/s που προκαλείται από μια ιδεατή κρούση 1 Ns και εφαρμοζόμενη στο σημείο που θα δώσει τη μέγιστη απόκριση), καθώς και περιορισμοί για την τιμή της ταχύτητας  $dw/dt$  και της βύθισης (βέλος)  $w$ :

$$dw/dt = 4(0,4+0,6 k_{40})/(mba+200) (m/Ns^2) \quad (5.3)$$

όπου  $k_{40}$  είναι το πλήθος των ιδιομορφών με ιδιοσυχνότητα μικρότερη από 40 Hz και  $b$  είναι το πλάτος της πλάκας σε (m). Η τιμή του  $k_{40}$  δίδεται από τη σχέση:

$$k_{40} = \{[40/f_1]^2 - 1\}(b/a)^4 (EI)_a/(EI)_b \leq (EI)_a \quad (5.4)$$

όπου  $(EI)_b$  είναι η ισοδύναμη δυσκαμψία της πλάκας σε ( $Nm^2/m$ ) ως προς έναν άξονα παράλληλο προς την κατεύθυνση των δοκών. Σε ιστορικά κτίρια χωρίς εγκάρσιες δοκούς, η ροπή αδράνειας  $I_b$  αντιστοιχεί στο σανίδωμα, είναι αμελητέα και επομένως προκύπτει αδυναμία υπολογισμού των σχ. (5.2) και (5.4). Για φυσικές συχνότητες χώρων παραμονής ανθρώπων, οι οποίες είναι μεγαλύτερες των 8 Hz, θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$w/F \leq 1,5 [\text{mm/kN}] \quad dw/dt \leq 100 (f_1 \zeta^{-1}) [\text{m/(Ns}^2)] \quad (5.5)$$

όπου  $F$  είναι το σημειακό στατικό φορτίο που προξενεί βύθιση  $w$ . Το ποσοστό κρίσιμης απόσβεσης κατά τον EAK 2000 [25] έχει για ηλωτές κατασκευές την τιμή  $\zeta=5\%$ . (Ο EK 5 δέχεται  $\zeta=1\%$  [5, 23, 24]).

Συχνότητες  $f > 40$  Hz μπορούν να αγνοηθούν.

Με πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή [26] μπορεί να ελεγχθούν συγχρόνως η ταλάντωση και το επιτρεπόμενο βέλος κάμψης, σύμφωνα με τον EK 5.

Η σχ. (5.1) (σχ. 4.4.3c στον EK 5) αποτελεί τη βασική φυσική συχνότητα δοκού, η οποία φορτίζεται με γραμμικό φορτίο. Η βύθιση αμφιαρθρωτής δοκού για στατική φόρτιση δίδεται, ως γνωστόν, από τη σχέση:

$$w = (5/384) mg l^4/(EI) \quad (5.6)$$

όπου  $mg=q$ , το στατικό γραμμικό φορτίο. Ενσωματώνοντας τη σχ. (5.6) στη σχ. (5.1) προκύπτει:

$$f_1 = 0,56 w^{-0,5} \quad (5.7)$$

Η βασική φυσική συχνότητα προκύπτει και ως έκφραση του φορτίου. Κατά τον EK 5 (§ 4.4.3 (3) του κειμένου του) οι ιδιοσυχνότητες υπολογίζονται βάσει μόνον των μόνιμων δράσεων (ίδιο βάρος, διάρκεια δράσης >10 ετών).

Παρατηρείται ότι σε αντίθεση με αυτό που ρυθμίζει ο EK 5 (§ 4.4.3 (4) του κειμένου του), η σχ. (5.1) (σχ. 4.4.3c του κειμένου του) αναφέρεται σε δοκό και όχι σε πλάκα εδραζόμενη περιμετρικά με αρθρώσεις.

Ο EK 5 δεν αναφέρεται σε ιδιαίτερες ανθρώπινες δραστηριότητες (χορό, γυμναστική), ενώ για μηχανικές διεγέρσεις γίνεται παραπομπή στον ISO 2631-2 (1989).

## 6. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ ΠΑΤΩΜΑΤΩΝ

Εξετάζεται πάτωμα αποτελούμενο από  $N_1$  πλήθος κύριων δοκών στη διεύθυνση x, οι οποίες εδράζονται στα άκρα τους αρθρωτά, από σανίδωμα και από  $N_2$  πλήθος ενδιάμεσες δοκούς σύσφιγξης στη διεύθυνση y. Η ήλωση του σανιδώματος επί των δοκών δημιουργεί μια σύνθετη πλάκα χωρίς οριζόντιο άξονα συμμετρίας. Σε αναλογία με τις σύνθετες δοκούς οι ιδιοσυχνότητες του πατώματος δίδονται από τη σχέση (4.21) και οι δρώσες δυσκαμψίες είναι:

$$\begin{aligned} D_1' &= \alpha_1 b D_1 + N_1 E_\delta J_\delta + \beta_1 E_{2\sigma} A_{\sigma b} h_{1\sigma}^2 + N_1 A_\delta h_{1\delta}^2 \\ D_2' &= \alpha_2 a D_2 + \alpha_3 N_2 E_\delta J_\delta + \beta_2 E_{1\sigma} A_{\sigma a} h_{2\sigma}^2 + N_2 A_\delta h_{2\delta}^2 \\ D_3' &= b D_3 \quad D_0 = D_1' + 2c^2 D_3' + c^4 D_2' \\ \beta_1 &= 1/[1+\pi^2 E_{2\sigma} (A_{\sigma b}/N_1) s_1/(K a^2)] \quad N_1 = b/e_1 - 1 \\ \beta_2 &= 1/[1+\pi^2 E_{1\sigma} (A_{\sigma a}/N_2) s_2/(K b^2)] \quad N_2 = a/e_2 - 1 \\ h_{1\sigma} &= (h_\sigma + h_\delta)/2 - h_{1\delta} \quad h_{2\sigma} = (h_\sigma + h_\delta)/2 - h_{2\delta} \\ h_{1\delta} &= \beta_1 E_{2\sigma} (A_{\sigma b}/N_1) [(h_\sigma + h_\delta)/2]/[\beta_1 E_{2\sigma} (A_{\sigma b}/N_1) + E_{1\delta} A_\delta] \\ h_{2\delta} &= \beta_2 E_{1\sigma} (A_{\sigma a}/N_2) [(h_\sigma + h_\delta)/2]/[\beta_2 E_{1\sigma} (A_{\sigma a}/N_2) + E_{1\delta} A_\delta] \\ A_\delta &= d h_\delta \quad A_{\sigma a} = a h_\sigma \quad A_{\sigma b} = b h_\sigma \quad s_2 = b/N_1 \end{aligned} \quad (6.1)$$

όπου  $s_{1,2}$  είναι η απόσταση μεταξύ των ήλων που ενώνουν το σανίδωμα με τη δοκό στη διεύθυνση x και y, K είναι το μέτρο ολίσθησης του ήλου ( $K=600\text{N/mm}$  [7, 8]). Οι συντελεστές  $\alpha_{1,2}$  ( $0 \leq \alpha_{1,2} \leq 1$ ) μειώνουν τη δυσκαμψία του σανιδώματος, αν αυτό αποτελείται από πλήθος σανίδων (αν μπορεί να θεωρηθεί ως ενιαίο, τότε  $\alpha_{1,2}=1$ ). Ο συντελεστής  $\alpha_3$  ( $0 \leq \alpha_3 \leq 1$ ) μειώνει τη δυσκαμψία της ενδιάμεσης δοκού, επειδή αυτή δεν είναι ενιαία.

Η μάζα του πατώματος που ταλαντώνεται είναι:

$$m_\pi = N m_\delta + m_\sigma + m_{\mu\phi} \quad (6.2)$$

Ο πίνακας 1 δίδει για  $m_{\mu\phi}=0$  και μονό σανίδωμα ( $h_\sigma=2.5\text{cm}$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.5$ ) και για ενισχυμένο σανίδωμα ( $h_\sigma=2X2.5\text{cm}$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1$ ,  $\alpha_3=0.5$ ) την ιδιοσυχνότητα  $f_{11}^\Delta$  κοινών πατωμάτων ( $d=7\text{cm}$ ,  $h_\delta=2d$ ,  $e_1=e_2/2 \approx 55\text{cm}$ , C24-11E) σε ποσοστά της τιμής  $f_1$  που προκύπτει από τον EK 5.

Η παρούσα μέθοδος αποδίδει ακριβέστερα την πραγματικότητα και παρέχει υψηλότερες ιδιοσυχνότητες ιδίως σε περιπτώσεις ύπαρξης: α) ενδιάμεσων δοκών σύσφιξης, οι οποίες αυξάνουν τη δυσκαμψία του πατώματος ως προς τον άξονα x και β) αυξημένης μάζας δαπέδου (π.χ. με ενίσχυση από σκυρόδεμα, το οποίο κατασκευάζεται ενίστε πάνω από υφιστάμενα ξύλινα πατώματα σε υγρή χρήση).

## 7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

α) Είναι δυνατός ένας ακριβής υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων ιστορικών ξύλινων πατωμάτων, εάν ληφθεί

Πίνακας 1: Η βασική ιδιοσυχνότητα συνήθους πατώματος  $f_{11}^\Delta$  εκφρασμένη σε ποσοστά της τιμής  $f_1$  που προκύπτει κατά τον EK 5.  
Table 1: The basic physical frequency  $f_{11}^\Delta$  of a typical floor expressed in percentage of the value  $f_1$  obtained according to EC 5.

	a=b=2m	a=b=3m	a=b=4m	a=b=5m
$h_\sigma=2.5\text{cm}$	115%	118%	120%	121%
$h_\sigma=2X2.5\text{cm}$	140%	143%	145%	147%

υπόψη η συνεισφορά των δοκών και της επικάλυψης (σανιδώματος / δαπέδου). Η μαθηματική έκφραση των ιδιοσυχνοτήτων είναι εφαρμόσιμη για αρθρωτή και πακτωμένη περιμετρική έδραση του πατώματος, προσφέρει δε μια σημαντική αύξηση της βασικής ιδιοσυχνοτήτας.

β) Ο υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων του πατώματος σύμφωνα με τον EK 5 (§ 4.4.3.(3) του EK 5) γίνεται στη βάση των μόνιμων δράσεων. Αυτό οδηγεί σε υπολογιστικά αποτελέσματα που παρέχουν ιδιοσυχνότητες με μεγαλύτερη τιμή από αυτήν που προκύπτει, εάν υπάρξουν δράσεις μακροχρόνιες ή μεσοχρόνιες. Επομένως, τα υπολογιστικά αποτελέσματα σύμφωνα με τον EK 5 είναι υψηλότερα (ευμενέστερα) της πραγματικότητας.

γ) Η μαθηματική σχέση του EK 5 για τις ιδιοσυχνότητες (σχ. 4.4.3c του EK 5) αναφέρεται σε αμφιαρθρωτή δοκό. Ωστόσο, η διατύπωση (§ 4.4.3 (4) του EK 5) ότι η σχ. (5.1) αναφέρεται σε περιμετρικά αρθρωτό ορθογώνιο πάτωμα είναι δυνατόν να προκαλέσει παρανοήσεις ως προς τη φύση του φορέα, δηλαδή ότι πρόκειται για πλάκα και όχι για σύστημα αυτοτελών δοκών. Οι ιδιοσυχνότητες των πλακών είναι υψηλότερες από αυτές των δοκών αντίστοιχων πατωμάτων και επομένως ο υπολογισμός σύμφωνα με τον EK 5 δίδει μειωμένες (δυσμενέστερες) τιμές.

δ) Συχνά τα πατώματα στα ιστορικά κτίρια δεν είναι δυνατόν να λειτουργήσουν ως πλάκες χωρίς κατασκευαστικές επεμβάσεις, ενώ η διασφάλιση περιμετρικής αρθρωτής έδρασης είναι δύσκολη. Επομένως, για να εφαρμοστεί ο EK 5, θα πρέπει να πραγματοποιηθούν τροποποιήσεις στην κατασκευή, οι οποίες δεν προκύπτουν από τη βασική σχέση (5.1).

ε) Η σχέση του EK 5 για τις ιδιοσυχνότητες είναι χρήσιμη λόγω της απλότητάς της. Όμως, ο κώδικας αυτός προτείνει ανταγωνιστικές απλουστευτικές προσομοιώσεις: υποτίμηση της κατασκευής λόγω θεώρησης του πατώματος ως συστήματος δοκών, συγχρόνως υπερεκτίμηση της κατασκευής αφού λαμβάνει υπόψη μόνον τις μόνιμες δράσεις. Έτσι είναι δύσκολο να διαφανεί ο βαθμός ανοχών που διασφαλίζεται. Οι επιπροσθέτως παρεχόμενες συνθήκες από τον EK 5 δεν είναι δυνατόν πάντα να χρησιμοποιηθούν στα ιστορικά πατώματα.

Προτείνεται, λοιπόν, ο έλεγχος της ταλάντωσης των ιστορικών πατωμάτων να διεξάγεται με το παρόν πιο ρεα-

λιστικό μοντέλο των δοκών που συνεργάζονται με το σανίδωμα. Αυτό το μοντέλο παρέχει τιμές ιδιοσυχνοτήτων που βρίσκονται πιο κοντά στην πραγματικότητα, ενώ ο EK 5 προσφέρει ένα κατώτατο συντηρητικό όριο.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Harnach, R.: Zur Schwingungsberechnung von Holztragwerken, Teil 1. **Bauen mit Holz 11** (1987), 725-729.
2. Harnach, R.: Zur Schwingungsberechnung von Holztragwerken, Teil 2. **Bauen mit Holz 12** (1987), 810-814.
3. Lekhnitskii, S.G.: **Anisotropic plates**. Gordon and Breach Sc. Publ., N.Y.-London-Paris, 1968.
4. Schulze, K.: **Experimentelle Meatechnik im Maschinen - und Stahlbau**. VEB Verl. Technik, Berlin, 1988.
5. **Eurocode 5** - Design of timber structures, **Part 1-2**: General rules and rules for buildings. ENV 1995-1-1, Dec. 1993.
6. Επιστημονική Επιτροπή Μελέτης Κανονισμών Οικοδομικών Έργων: Ξύλιναι Κατασκευαί (Υλικόν, Μελέτη και Εκτέλεσις). **Τεχνικά Χρονικά Περ. Β' έτος Γ', τόμ. XXIV**, τεύχ. 273-274 (21-22), Μάρτιος-Απρίλιος 1947, σ. 103-113.
7. DIN 1052, έκδ. Οκτ. 1969: Holzbauwerke. **Μπετόν Καλέντερ 1977**, έκδ. TEE.
8. **DIN 1052**, έκδ. Απρ. 1988: Holzbauwerke.
9. Υ.ΠΕ.ΧΩ.Δ.Ε., Εγκύλιος αρ. πρωτ. Δ11β/91/20-12-95 της Γ.Γ. Δημοσίων Έργων, **Ενημ. Δελτ. TEE, Τεύχος 1891**, 29-1-1996, σ. 131.
10. Υ.ΠΕ.ΧΩ.Δ.Ε., Εγκύλιος 15 Δ11β/030/9-5-1966 της Γ.Γ. Δημοσίων Έργων, **Ενημ. Δελτ. TEE, Τεύχος 1910**, 17-6-1996, σ. 83.
11. Ohlsson, S.: Grenzzustaende der Gebrauchstauglichkeit -Schwingungen. In: **Bemessung und Baustoffe, Step1**, eds: H.J. Blaß, R. Goerlacher, G. Steck, Info-dienst Holz, Fachverl. Holz, 1995, pp. A18/1-8.
12. **ISO 2631-2** (1989), «Evaluation of human exposure to whole-body vibration, Part 2: Continuous and shock-induced vibration in buildings (1-80 Hz)».
13. Marek, P.: **Grenzzustaende der Metalkonstruktionen**. VEB Verlag f. Bauwesen, Berlin, 1983, 116.
14. British Standards Institution, **BS 5400**, Part 2, App. C (1978), Vibration serviceability requirements for fast and cycle track busses.
15. **DIN 4150**, έκδ. Σεπτ. 1975, Μέρος 2.
16. **Eurocode 5 - Design of Timber Structures, Part 2: Bridges**, Draft April 1995 CIB-1018/28-102-1.
17. Benninghoven, H.: Traegerrostberechnung als Beitrag zur Fachwerkhausstatik. **Bauen mit Holz 12** (1985), 842-846.
18. Fuehrer, W., Optimierung von Balkenlagenanordnungen. **Bauen mit Holz 7** (1977), 317-322.
19. Moenck, W.: **Schaeden an Holzkonstruktionen - Analyse und Behebung**. Verl. f. Bauwesen, Berlin, 1995.
20. Jobavobica, G.C.: **Οικοδομική** (πανεπιστημιακές σημειώσεις), Βελτηράδι.
21. Thelandersson, S.: Grenzzustaende der Gebrauchstauglichkeit -Verformungen. In **Bemessung und Baustoffe, Step1**, eds: H.J. Blaß, R. Goerlacher, G. Steck, Info-dienst Holz, Fachverl. Holz, 1995, pp. A17/1-8.
22. **Eurocode 1** (ENV 1991-2-1) - Basis of design and actions on structures - **Part 2-1**: Actions on structures - Densities, self-weight and imposed loads. CEN, 1993.
23. **Eurocode 5 - Anwendungsdocument. Holzbauwerke Step 4**, eds: Fachverlag Holz, Bruderverlag, 1995.
24. **Eurocode 5 - Calcul des structures en bois, Partie 1-1: Règles générales et règles pour les bâtiments**. Enrolles, 1996.
25. Ελληνικός Αντισεισμικός Κανονισμός (Ε.Α.Κ.) 2000. Ο.Α.Σ.Π., Αθήνα, Σεπτέμβριος 1999.
26. **WinWood**: Πρόγραμμα Ηλεκτρονικού Υπολογιστή Διαστασιολήγησης Ξύλινων Δομικών Κατασκευών σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 5. Δ. Παπαλεξίου και N. Χατζητρύφων, Ξάνθη, 1998.

## N.K. Χατζητρύφων,

Δρ πολιτικός μηχανικός, 4<sup>η</sup> Εφορεία Νεωτέρων Μνημείων / Υπουργείο Πολιτισμού, Ηροδότου 17, 546 34 Θεσσαλονίκη, τηλ.: 031-214497, τηλ./φαξ: 031-213800, e-mail: hatzitrifon@yahoo.com

Extended summary

# Computation of Timber Floor Vibration in Historical Buildings

**N.K. HATZITRIFON**

Dr Civil Engineer, 4th Superintendence for Modern Monuments / The Hellenic Ministry of Culture

**Abstract**

The required serviceability principles for timber floors in respect to their vibration are described. The mathematical relations for the natural frequencies of beams and orthotropic plates with or without ribs/beams are discussed. In the following, the expression used by Eurocode 5 for the physical frequencies of floors as well as its accompanying text, are discussed. The mentioned text refers to an isotropic beam, but it also assumes the existence of a plate simply supported at its perimeter. Often, in historical floors a simply supported periphery cannot be achieved without constructive interventions. Eurocode also describes that frequency only for the permanent actions has to be calculated, and thus for the natural frequencies higher values are obtained than the ones appearing in reality. This is an underestimate of the resonance danger. A new mathematical solution for the natural frequency for a floor consisting of beams co-operating with the plank covering is presented. This solution provides higher natural frequencies than the ones obtained by the beam analysis. It is proposed that historical timber floors should be examined with the more realistic method presented here.

**1. INTRODUCTION**

For historical timber floors, a system of parallel beams, simply supported at their ends, is usually used as a model. Additionally to this simplification, only permanent actions have to be considered according to Eurocode 5 (EC 5). These two approaches under- and overestimate, respectively, the value of natural frequencies (NF) occurring in reality. So, it happens that historical floors are not reinforced, although this should be done, or they are extensively repaired with superfluous reinforcement.

The plank covering, the supporting cross beams or the short beams and stiffening connectors between the main beams build a reinforcement of the floor. They cause constructive anisotropic behaviour for the floor, which is lacking in its ability to develop moments, in comparison with an untied plate. The observation of the timber floors as isotropic plates, with or without ribs, yields for the NF values, which are overestimated.

Submitted: March 8, 1999 Accepted: Jan. 13, 2000

The present work proposes an analytical co-calculation of beams and planks covering influence. The floor is considered as a plate. EC 5 is discussed and some of regulations are judged to be inapplicable to historical floors. Chapter 3 reports the serviceability of some historical floor types. Chapter 4 presents a mathematical analysis for beam and plate vibration. In Chapter 5, EC 5 with regard to vibrations is discussed and Chapter 6 proposes a new solution for historical floors. Chapter 7 gives the conclusions.

**2. SYMBOLS (see Greek text)****3. SERVICEABILITY AND LABOURING****3.1. Serviceability**

Walking of people causes a vertical vibration of 1 to 5 Hz. The lowest allowed value for frequencies according to EC 5 is 8 Hz, which corresponds to an acceleration of 0.6 m/s<sup>2</sup> according to DIN 4150 [15]. Diagrams and relations propose accelerations for a pleasant residence [13-15].

**3.2. Labouring**

Pictures 1 and 2 and figures 1 to 4 show some possibilities of how historical floor constructions look.

**4. PHYSICAL FREQUENCY ANALYSIS****4.1. Beam**

For an isotropic beam of length  $l$  ( $0 \leq x \leq l$ ), the NF results from the relation given by eq. (4.1), where  $E_{/\delta} = E_1$ . In the case of nonentity absorption and stimulation, it takes the form of eq. (4.2). The solution of eq. (4.2) is expressed by eq. (4.3). Using the initial and boundary conditions, the integral constants  $C_j$  ( $j=1-6$ ) can be calculated. For the main cases of beam supporting (ends: fixed / free; ends: simply supported / simply supported; ends: fixed / simply supported; ends: fixed / fixed), the relation and solution for the NF of an isotropic beam is given in [1] by the eqs (4.4α-δ) respectively.

Eqs (4.5α-β) give the NF, eq. (4.6) gives approximate solutions.

#### 4.2. Thin Plates

The basic NF for simply supported plates is given in eqs (4.21α-β) and for fixed ends in eq. (4.23) [3]. The plank covering causes an increase in the NF, eq. (4.25).

### 5. VIBRATION ACCORDING TO EUROCODE 5

The basic NF is given by eq. (5.1), the higher NFs by eq. (5.2). Both equations present a beam analysis. The basic NF can also be expressed as a function of the deformation (eq. (5.7)). The additional condition given by eq. (5.4) does not apply to historical timber floors without intermediary stiffening beams because of the small value of  $(EI)_b$ . Vibrations are calculated for permanent loads only.

Vibration and the deformation can be checked simultaneously by a computer program [26].

### 6. APPROACH OF HISTORICAL FLOOR VIBRATION

The plank covering in historical timber floors is modeled as a plate, and eqs (4.21α-β) are valid. The effective bending stiffness of the plate is given by eq. (6.1). The vibrating mass consists of the permanent and the long-term loads (eq. 6.2). For a typical floor (class C24-11E,  $d=7\text{cm}=h_0/2$ ,  $h_0=2.5\text{cm}$ ,  $e_1=60\text{cm}$ , and intermediary stiffening short beams with  $e_2=2e_1$ ) the obtained value for the fundamental NF is given in table 1 in percentage of the value calculated according to EC 5.

### 7. CONCLUSIONS

a) It is possible to calculate accurately the NF of a historical timber floor by considering the beams and the plank covering. The method presented here is based on an analysis of an orthotropic plate reinforced by nailed beams.

b) The NF according to EC 5 is calculated using the permanent actions. This could lead to higher values of NF than the ones obtained also using actions of long-term. The obtained values are favourable compared to the ones appearing in reality.

c) The frequencies in EC 5 emanate from an analysis of a simply supported beam. But the phrasing of § 4.4.3 (4) in EC 5 speaks of a simply supported plate at its periphery. So, EC 5 provides decreased values, which are unfavourable.

d) For many floors laboured with parallel beams in one direction it is not possible to achieve the action of a four-end-supported plate without substantial interventions. The labour of simple support at the plate periphery is not always secured and does not result from the basic beam equation.

e) The solution for the NF according to EC 5 serves because of its simplicity, but it proposes competitive simplifications: floor underestimation as result of using a beam model and not considering the plank covering influence; overestimation of the construction because of using only the permanent actions. Therefore, the tolerance of the construction is difficult to derive. The additional conditions in EC 5 cannot always be applied.

Thus, the calculation according to the more realistic method presented here is proposed and provides more realistic results. The frequency values according to EC 5 are rated as low and conservative.