

# Νέες Μέθοδοι Μεγίστης Πιθανοφάνειας Εκτίμησης των Κατευθυντικών Φασμάτων Θαλάσσιων Κυματισμών

**Σ. ΧΡΙΣΤΟΠΟΥΛΟΣ**

Δρ Πολιτικός Μηχανικός

**I. ΤΣΑΝΗΣ**

Καθηγητής McMaster Univ.

**F. BRISSETTE**

Αναπλ. Καθηγητής Quebec Univ.

## Περίληψη

Η εκτίμηση των κατευθυντικών φασμάτων θαλάσσιων κυματισμών γίνεται με διάφορες τεχνικές, οι κυριότερες των οποίων είναι οι μέθοδοι της μεγίστης πιθανοφάνειας. Σε αντί την εργασία γίνεται σύντομη παρουσίαση των νέων μεθόδων της μεγίστης πιθανοφάνειας και παρουσιάζονται αποτελέσματα εκτίμησεων κατευθυντικών φασμάτων από θεωρητικά πειράματα με φάσματα μίας κορυφής και φάσματα δύο κορυφών καθώς και από μετρήσεις πεδίου σε λίμνη των Καναδά καθώς και σε περιοχή του Ατλαντικού Ωκεανού.

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κατανομή της πυκνότητας ενέργειας των κυματισμών συνήθως περιγράφεται ως συνάρτηση της συχνότητάς τους. Η απόκτηση του μονοδιάστατου φάσματος συχνότητας είναι αρκετά εύκολη, δεδομένου ότι η καταγραφή της ανύψωσης της θαλάσσιας επιφάνειας σε ένα σημείο είναι επαρκής. Για την πλήρη περιγραφή, όμως, των θαλάσσιων κυματισμών χρειαζόμαστε την πληροφορία της κατεύθυνσης των κυματισμών [22]. Η απόκτηση του διδιάστατου κατευθυντικού φάσματος είναι σημαντική σε πολλές ωκεάνειες και παράκτιες εφαρμογές του μηχανικού, όπως η πρόγνωση των κυματισμών, η προστασία των ακτών, η δυναμική ανάμειξης της ανώτερης θαλάσσιας στρώσης, η μελέτη περιβαλλοντικών κινδύνων και ο σχεδιασμός των θαλάσσιων κατασκευών και πλωτών μέσων. Η απόκτηση της πληροφορίας της κατεύθυνσης των κυματισμών μπορεί να γίνει είτε με μονοπαραμετρικούς κυματογράφους σε ορισμένη διάταξη (μέτρηση της ανύψωσης, της πίεσης κ.λπ.) [19] είτε με κατευθυντικούς κυματογράφους (πλωτήρας κλίσεων - heave, pitch & roll buoy) [2].

Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την απόκτηση των κατευθυντικών φασμάτων, οι οποίες ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες: οι μέθοδοι με άμεσο μετασχηματισμό Fourier [4, 13, 16, 19, 23], οι μέθοδοι μεγίστης πιθανοφάνειας [3, 6, 7, 9, 15, 17, 18, 19] και η μέθοδος μεγίστης εντροπίας [14].

Σε αυτήν την εργασία, αφού παρουσιασθούν η κλασική, η επαναληπτική και η συνελικτική μέθοδος μεγίστης πιθανο-

φάνειας (δεύτερο κεφάλαιο), δίνονται στοιχεία των νέων μεθόδων μεγίστης πιθανοφάνειας (τρίτο κεφάλαιο). Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα από θεωρητικά πειράματα και από μετρήσεις πεδίου.

## Συμβολισμοί

### a) Ελληνικά γράμματα

- α παράγοντας περιορισμού (εκτίμηση NMLM)
- β παράμετρος διασποράς
- ε<sub>s</sub> παράγοντας βαθμονόμησης του κατευθυντικού φάσματος με το φάσμα συχνοτήτων
- ζ παράγοντας κανονικοποίησης (εκτίμηση NMLM)
- η ανύψωση θαλάσσιας επιφάνειας
- θ κατεύθυνση κυματισμού
- Ξ πίνακας των συναρτήσεων μεταφοράς ( $H(\omega, \theta)$ )
- ρ<sup>2</sup> στατιστική παράμετρος του Long (1980)
- υ παράμετρος χαλάρωσης
- ω, ω<sub>k</sub> γωνιακή συχνότητα κυματισμού

### b) Λατινικά γράμματα

- A(ω, θ) μιγαδικός πίνακας που χρησιμοποιείται στους τύπους της MLM
- C<sub>ij</sub> πραγματικό μέρος του διασταυρούμενου φάσματος
- C(ω) πίνακας πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος
- f συχνότητα
- H(ω, θ) συνάρτηση μεταφοράς που συσχετίζει μία μέτρηση κυματισμού με την ανύψωση της θαλάσσιας στάθμης
- i =  $\sqrt{-1}$
- k κυματαριθμός
- Q<sub>ij</sub> φανταστικό μέρος του διασταυρούμενου φάσματος
- S(ω, θ) κατευθυντικό φάσμα
- S(θ) φάσμα κατευθύνσεων (για μια δοσμένη συχνότητα)
- S<sup>R</sup> κατευθυντικό φάσμα με χρήση του ανακατασκευασμένου πίνακα του διασταυρούμενου φάσματος
- t χρόνος

$\vec{x}$  συντεταγμένες χώρου (x,y)  
 $X(\omega, \theta)$  πίνακας μιγαδικής διαφοράς φάσης

### γ) Εκθέτες

H Αναστροφή πίνακα  
 $*$  συζυγής  
 $-1$  αντίστροφος  
 $\hat{x}$  εκτιμώμενη τιμή

### δ) Συντομογραφίες

IMLM Iterative Maximum Likelihood Method  
INMLM Iterative Normalized Maximum Likelihood Method  
CMLM Convulsive Maximum Likelihood Method  
MLM Maximum Likelihood Method  
NMLM Normalized Maximum Likelihood Method  
NWRI National Water Research Institute  
SWADE Surface Wave Dynamics Experiment  
MLMC Maximum Likelihood Method Corrected

## 2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

Από τις χρησιμοποιούμενες μέχρι σήμερα μεθόδους μεγίστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των κατευθυντικών φασμάτων παρουσιάζεται αναλυτικά η κλασική μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (MLM) και συνοπτικά η επαναληπτική (IMLM) και η συνελικτική (CMLM). Υπάρχει ακόμα και η μέθοδος με ιδιοδιανύσματα (EVMLM) [15], η οποία όμως έχει προβλήματα εφαρμογής σε περίπτωση μετρήσεων κυματισμών με ομάδα μονοπαραμετρικών κυματογράφων.

### 2.1. Μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (MLM)

Αρχικά η μέθοδος αυτή δημιουργήθηκε για την εξαγωγή του διδιάστατου κατευθυντικού φάσματος κυματισμών από καταγραφές ομάδας μονοπαραμετρικών κυματογράφων σε ορισμένη διάταξη [3].

Η μορφή της επιφάνειας της θάλασσας αποτελείται από επαλληλία κυματισμών με διαφορετικές συχνότητες  $\omega_k$  που έχουν πυκνότητα ενέργειας  $S(\omega_k, \theta_j)$  και προέρχονται από διαφορετικές κατευθύνσεις  $\theta_j$ , όπου  $j=1,2,\dots,P$  και  $P$  ο συνολικός αριθμός κατευθύνσεων. Ο πίνακας της πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος ισχύος για μια συχνότητα  $\omega_k$  μπορεί να εκφρασθεί από τη σχέση:

$$C(\omega_k) = \sum_{j=1}^P X(\omega_k, \theta_j) X^H(\omega_k, \theta_j) S(\omega_k, \theta_j) \quad (2.1)$$

όπου  $X(\omega_k, \theta_j)$  είναι ο πίνακας της μιγαδικής διαφοράς φάσης μεταξύ του αισθητηρίου οργάνου κάθε κυματογράφου και της αρχής του συστήματος αναφοράς των αξόνων. Ο πίνακας της πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος

μπορεί να εκτιμηθεί από την ομάδα των μονοπαραμετρικών κυματογράφων ως:

$$\hat{C}_{ij}(\omega_k) = \frac{\left| f_i(\omega_k) f_j^*(\omega_k) \right|}{\left| f_i(\omega_k) \right| \left| f_j(\omega_k) \right|} \quad (2.2)$$

όπου  $f_i(\omega_k)$  και  $f_j(\omega_k)$  είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των σημάτων που προέρχονται από το i-οστό και το j-οστό αισθητήριο όργανο αντίστοιχα στη συχνότητα  $\omega_k$ .

Με χρήση της θεωρίας των πολλαπλασιαστών Lagrange [8, 11] η εκτίμηση του κατευθυντικού φάσματος δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{S}(\omega_k, \theta_j) = \frac{\varepsilon_s}{X^H(\omega_k, \theta_j) C^{-1}(\omega_k) X(\omega_k, \theta_j)} \quad (2.3)$$

όπου  $\varepsilon_s$  είναι ένας παράγοντας βαθμονόμησης που εξισώνει την ολική ενέργεια στη συχνότητα  $\omega_k$  με την ισχύ του μονοδιάστατου φάσματος κατευθύνσεων.

Με βάση τα διαθέσιμα δεδομένα από τις καταγραφές των αισθητήρων και με χρήση της σχ. (2.2) υπολογίζονται οι πίνακες  $C(\omega_k)$  και μετά με χρήση της σχ. (2.3) γίνεται η εκτίμηση του κατευθυντικού φάσματος  $\hat{S}(\omega_k, \theta_j)$ .

Η επέκταση της μεθόδου αυτής σε μετρήσεις κατευθυντικών κυματογράφων έγινε από τους Isobe et al. [7] με τον τύπο:

$$\hat{S}(\omega_k, \theta_j) = \frac{\varepsilon_s}{\sum_m \sum_n C_{mn}^{-1}(\omega_k) H_m^*(\omega_k, \theta_j) H_n(\omega_k, \theta_j) e^{ik(x_n - x_m)}} \quad (2.4)$$

όπου  $H_{m,n}(\omega_k, \theta_j)$  η συνάρτηση μεταφοράς που συσχετίζει κάθε μέτρηση του κατευθυντικού κυματογράφου με την ανύψωση της θαλάσσιας στάθμης,  $x_m$ ,  $x_n$  οι χωρικές συντεταγμένες των διαφορετικών σημάτων και m, n ίσοι με 3 (μετρήσεις πλωτήρα κλίσεων).

Στην περίπτωση της ομάδας μονοπαραμετρικών κυματογράφων οι συναρτήσεις μεταφοράς ισούνται με τη μονάδα και η σχ. (2.4) μετασχηματίζεται στη σχ. (2.3). Στην περίπτωση του πλωτήρα κλίσεων οι συντεταγμένες  $x_m$ ,  $x_n$  είναι ίδιες και η σχ. (2.4) παίρνει τη μορφή:

$$\hat{S}(\omega_k, \theta_j) = \frac{\varepsilon_s}{\Xi^H(\omega_k, \theta_j) C^{-1}(\omega_k) \Xi(\omega_k, \theta_j)} \quad (2.5)$$

όπου οι συναρτήσεις μεταφοράς δίνονται από τη σχέση:

$$\Xi(\omega_k, \theta_j) = \begin{bmatrix} 1 \\ ik \cos \theta_j \\ ik \sin \theta_j \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Για κατευθυντικό κυματογράφο τύπου πλωτήρα κλίσεων ο παράγοντας βαθμονόμησης  $\varepsilon_s$  είναι βαθμωτό μέγεθος, ο πίνακας της πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος C έχει διαστάσεις 3x3 για κάθε συχνότητα  $\omega_k$  και οι εξισώσεις μεταφοράς δίνονται από τη σχ. (2.6), όπου ο κυματαριθμός k υπολογίζεται από τη σχέση:

$$k = \left[ \frac{C_{22} + C_{33}}{C_{11}} \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

με τους δείκτες 11, 22 και 33 να αντιπροσωπεύουν τα σήματα της ανύψωσης (heave) και των κλίσεων προς ανατολάς (pitch) και βορρά (roll).

Ο υπολογισμός του κυματαριθμού με χρήση της γραμμικής θεωρίας κυματισμών μπορεί να οδηγήσει σε αρνητικές τιμές του κατευθυντικού φάσματος. Για την άρση αυτού του προβλήματος προτάθηκε η χρήση τροποποιημένων εκτιμήσεων μεγίστης πιθανοφάνειας με την υπόθεση καλύτερων εκτιμήσεων με εξαναγκασμένη χρήση της γραμμικής σχέσης διασποράς των κυματισμών [6]. Τα αποτελέσματα έδειχναν οριακή βελτίωση σε τόσο λίγο βαθμό, που τα συμπεράσματα ήταν λεκτικά χωρίς γραφικές παραστάσεις.

## 2.2. Επαναληπτική μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (IMLM)

Γενικά ο πίνακας του διασταυρούμενου φάσματος C, που προκύπτει από τις εκτιμήσεις των κατευθυντικών φασμάτων S( $\omega_k$ ,  $\theta_j$ ) με χρήση της σχ. (2.1), δεν συμπίπτει τις περισσότερες φορές με τον αρχικό πίνακα C( $\omega_k$ ). Για την άρση αυτής της ασυνέπειας προτάθηκε η χρήση ενός σχήματος επαναλήψεων, ώστε η εκτίμηση της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας να συγκλίνει σε μια συνεπή μορφή με τα δεδομένα των μετρήσεων [17, 18]. Μεταξύ των σχημάτων που χρησιμοποιούνται, η πιο απλή μορφή είναι [9]:

$$S_{n+1} = S_n + \nu(S_{MLM} - S_{MLM}^R) \quad (2.8)$$

όπου  $S_{MLM}$  η εκτίμηση της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας,  $S_{MLM}^R$  η εκτίμηση της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας του ανακατασκευασμένου πίνακα του διασταυρούμενου φάσματος  $C^R(\omega_k)$  χρησιμοποιώντας το n-οστό φάσμα  $S_n$  ( $S_0 = S_{MLM}$ ), S το κατευθυντικό φάσμα S( $\omega_k$ ,  $\theta_j$ ) και  $\nu$  η παράμετρος χαλάρωσης με τιμή 1.2 που εξασφαλίζει τη σύγκλιση και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για πέντε επαναλήψεις περίπου.

## 2.3. Συνελικτική μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (CMLM)

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας παρατηρήθηκε ότι η εκτίμηση του φάσματος είχε μια κατευθυντική κατανομή εξαρτώμενη από τη συχνότητα [20]. Για

τη διόρθωση αυτής της επίδρασης προτάθηκε η συνέλιξη της εκτίμησης της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας με μία συνάρτηση μεταφοράς [19]. Αν υποθέσουμε ότι  $S(\omega_k, \theta)$  είναι το κατευθυντικό φάσμα που προκύπτει από τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας σε μια δοσμένη συχνότητα  $\omega_k$  και ότι  $R(\omega_k, \theta)$  είναι το πραγματικό φάσμα που ενυπάρχει στην εκτίμηση του φάσματος, τότε:

$$S(\omega_k, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} R(\omega_k, \theta) W(\omega_k, \theta - \alpha) d\alpha \quad (2.9)$$

όπου W( $\theta$ ) είναι μια συνάρτηση μεταφοράς του πίνακα και

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(\omega_k, \theta) d\theta = 1 \quad (2.10)$$

## 3. ΝΕΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΦΑΝΕΙΑΣ

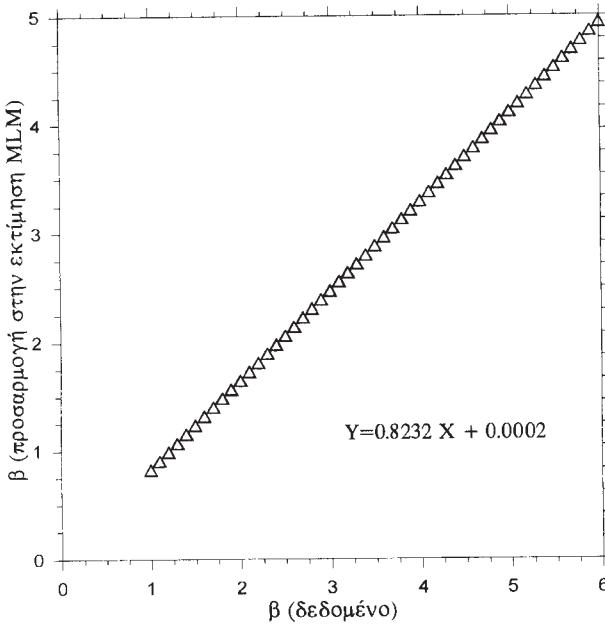
Οι εκτιμήσεις των κατευθυντικών φασμάτων με τις περισσότερες από τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους υπολογισμού τους έχουν χαρακτηριστικά που είναι συνάρτηση της θεωρούμενης συχνότητας των κυματισμών καθώς και της θεωρούμενης κατευθυντικής τους κατανομής. Οι εκτιμήσεις με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας ουσιαστικά είναι ανεξάρτητες της κατευθυντικής κατανομής των κυματισμών.

### 3.1. Κανονικοποιημένη μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (NMLM)

Κάνοντας χρήση της κατευθυντικής κατανομής που δίνεται από τον τύπο:

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \beta \sec h^2 \{ \beta(\theta) \} \quad (3.1)$$

ερευνήθηκε η απόκριση των διαφόρων μεθόδων μεγίστης πιθανοφάνειας [1] με διαφορετικές τιμές της παραμέτρου διασποράς  $\beta$  (τιμές 1-6), που συμπεριλαμβάνουν τις τιμές 1.24 έως 2.62, που είναι η τυπική τάξη μεγέθους των ανεμογενών κυματισμών [5]. Με χρήση κάθε κατευθυντικής κατανομής ο πίνακας της πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος ισχύος ανακατασκευάζεται και προκύπτει μια νέα εκτίμηση με τη μέθοδο της μεγίστης πιθανοφάνειας. Η υπερεκτίμηση της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας ήταν σταθερή για όλες τις τιμές της παραμέτρου διασποράς  $\beta$  (σχήμα 1). Αυτό οδήγησε στην εισαγωγή τεχνητής διασποράς, ώστε το εκτιμώμενο φάσμα να τείνει σε μια “στενότερη” μορφή. Η κανονικοποίηση της ενέργειας σε κάθε κατευθυνση γίνεται σύμφωνα με έναν παράγοντα  $\zeta$ , που ορίζεται ως:



Σχήμα 1: Σύγκριση τιμών β μεταξύ δεδομένων και προσαρμοσμένων πληθυσμών.

Figure 1: Comparison of  $\beta$  values between input and fitted populations.

$$\zeta_i = \alpha \frac{\sec h^2(\alpha\beta\theta_i)}{\sec h^2(\beta\theta_i)} \quad (3.2)$$

όπου  $\beta$  είναι η παράμετρος διασποράς της κατεύθυντικής κατανομής  $\text{sech}^2$  και  $\alpha$  είναι ένας περιοριστικός παράγοντας που ισούται με 0.82 [1].

Ο παράγοντας κανονικοποίησης  $\zeta$  ανακατανέμει την ενέργεια σε κάθε κατεύθυνση σύμφωνα με το λόγο των κατεύθυντικών κατανομών  $\text{sech}^2$  έτσι, ώστε να υπολογίζεται με ακρίβεια η συνάρτηση κατεύθυντικής κατανομής που παράγεται από τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας.

### 3.2. Επαναληπτική κανονικοποιημένη μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (INMLM)

Η κανονικοποιημένη μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας στοχεύει στη διόρθωση της τεχνητά εισαγόμενης εξάπλωσης της κατεύθυντικής κατανομής της εκτίμησης της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας. Ως εκ τούτου, η εκτίμηση με τη μέθοδο αυτή δεν είναι συνεπής με τα εισαγόμενα αρχικά δεδομένα. Παρόμοια με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας είναι δυνατή η χρήση ενός σχήματος επαναλήψεων για την άρση αυτής της ασυνέπειας [1], σύμφωνα με τη σχ. (2.8), όπου ως σημείο εκκίνησης λαμβάνεται η  $S_0=S_{NMLM}$ .

Η σύγκλιση της επαναληπτικής κανονικοποιημένης μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας γίνεται με χρήση της εκτίμησης της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας και όχι με την

εκτίμηση της κανονικοποιημένης μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας. Αυτό γίνεται για λόγους γρηγορότερης σύγκλισης και δυνατότητας εφαρμογής της μεθόδου σε όλες τις περιπτώσεις.

### 3.3. Διορθωμένη μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας (MLMC)

Η κανονικοποιημένη μορφή της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας είναι εμπειρική μέθοδος, διότι εφαρμόζεται ένα διορθωτικό σχήμα της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας που βασίζεται στις μετρήσεις πεδίου.

Σύμφωνα με τη σχ. (2.1) η εκτίμηση του κατεύθυντικού φάσματος είναι μια γραμμική επαλληλία όλων των διαθέσιμων δεδομένων ( $\omega_k$ ):

$$\hat{S}(\omega_k, \theta_j) = A^H(\omega_k, \theta_j)C(\omega_k)A(\omega_k, \theta_j) \quad (3.3)$$

όπου  $A$  είναι ένα μιγαδικό διάνυσμα στήλης διαστάσεως  $M$  (αριθμός των αισθητηρίων οργάνων).

Η σχ. (3.3) απλοποιείται για κάθε συχνότητα σε:

$$\hat{S}(\theta_j) = \sum_{i=1}^N \left[ \left| A^H(\theta_j)X(\theta_i) \right|^2 S(\theta_i) \right] \quad (3.4)$$

Η σχ. (3.4) δηλώνει ότι η κυματική ενέργεια σε μια δοσμένη κατεύθυνση διάδοσης  $\theta_j$  είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας σε κάθε κατεύθυνση  $\theta_i$  πολλαπλασιασμένης με έναν παράγοντα βάρους, που είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης που μας ενδιαφέρει  $\theta_j$  και όλων των άλλων κατεύθυνσεων  $\theta_i$ .

Για κάθε συχνότητα η εκτίμηση  $\hat{S}(\theta_j)$  μπορεί να γραφεί για μία από τις  $N$  κατεύθυνσεις στην απλή μορφή:

$$\hat{S} = |AX^T|^2 \underline{S} \quad (3.5)$$

όπου ο εκθέτης “2” δηλώνει υπολογισμό στοιχείου με στοιχείο, οι πίνακες  $A$  και  $X$  είναι διαστάσεων  $N \times M$ , όπου  $M$  είναι ο αριθμός των αισθητηρίων ή των μετρούμενων παραμέτρων κύματος, και  $\underline{S}, \underline{S}$  είναι διανύσματα στήλης διαστάσεως  $N$ .

Χρησιμοποιώντας τον περιορισμό ελαχιστοποίησης  $X(\theta_i)^H A(\theta_i) = 1$  [1] και μετά από διάφορους υπολογιστικούς μετασχηματισμούς οι συναρτήσεις  $A(\theta_i)$  δίνονται από τη σχέση:

$$A(\theta_i) = \frac{C^{-1}X(\theta_i)}{X(\theta_i)^H C^{-1}X(\theta_i)} \quad (3.6)$$

Με χρήση της σχέσης:

$$C^{-1}X(\theta_i)^H = X(\theta_i)^H C^{-1} \quad (3.7)$$

και με συνδυασμό των σχ. (3.6) και (3.4) είναι δυνατό να εκτιμηθεί το κατευθυντικό φάσμα από σχέση ανάλογης μορφής με τη σχ (2.3):

$$\hat{S} = \frac{1}{X(\theta_i)^H C^{-1} X(\theta_i)} \quad (3.8)$$

Οπότε η σχ. (3.5) μπορεί να γραφεί ξανά με τη μορφή

$$S = \left[ \left[ \frac{C^{-1} X(\theta_i)}{X(\theta_i)^H C^{-1} X(\theta_i)} \right] X^T \right]^{-1} \left[ \frac{1}{X(\theta_i)^H C^{-1} X(\theta_i)} \right] \quad (3.9)$$

που αποτελεί την ακριβή λύση υπολογισμού του κατευθυντικού φάσματος με χρήση της μεθόδου μεγίστης πιθανοφάνειας. Αυτή η λύση είναι απόλυτα συνεπής με τον πίνακα φασματικής πυκνότητας του διασταυρούμενου φάσματος των δεδομένων και αποτελεί την πραγματική εκτίμηση του κατευθυντικού φάσματος [1].

## 4. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΝΕΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Η αξιολόγηση των νέων μεθόδων μεγίστης πιθανοφάνειας γίνεται με βάση θεωρητικά πειράματα για φάσματα μίας κορυφής (ανεμογενείς κυματισμοί) και δύο κορυφών (τοπικοί ανεμογενείς κυματισμοί και αποθάλασσα) καθώς και κυματικά δεδομένα πεδίου, που συλλέχτηκαν τόσο από κατευθυντικούς κυματογράφους όσο και από μονοπαραμετρικούς κυματογράφους σε ορισμένη διάταξη.

Για τη διερεύνηση της απόκρισης των διαφόρων μεθόδων σε φάσματα μίας κορυφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε η κατευθυντική κατανομή  $\text{sech}^2$  [5]:

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \sec h^2 \{ \beta(\theta - \bar{\theta}) \} \quad (4.1)$$

με παραμέτρους διασποράς  $\beta$  που κυμαίνονται από 1 έως 4.5, είτε  $\cos^2$  [13]:

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cos^{2s} \{ \beta(\theta - \bar{\theta}) \} \quad (4.2)$$

με την παράμετρο  $s$  να κυμαίνεται από 2 έως 35.

Με χρήση αυτών των θεωρητικών κατανομών κατασκευάζονται πρότυπα φάσματα για μια συγκεκριμένη συχνότητα. Υπολογίζεται ο πίνακας τιμών της πυκνότητας ενέργειας του διασταυρούμενου φάσματος ισχύος και μετά γίνεται εκτίμηση του κατευθυντικού φάσματος με μία από τις εξεταζόμενες μεθόδους, ώστε να συγκριθεί με το πρότυπο φάσμα.

Για τη διερεύνηση της απόκρισης των διαφόρων μεθόδων σε φάσματα δύο κορυφών χρησιμοποιείται η  $\text{sech}^2$  κατευθυντική κατανομή με τιμές της παραμέτρου διασποράς  $\beta = 1, 3$  και 5. Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί μεταξύ των τριών κατευθυντικών κατανομών χρησιμοποιούνται για το πείραμα αυτό με διαφορετική απόσταση των κορυφών του φάσματος -30°,

90° και 150° - καθώς και τιμές του λόγου ενεργειών μεταξύ των δύο κορυφών που κυμαίνονται από 1 έως 4. Σε ορισμένα πειράματα διερευνάται η εξέλιξη της στατιστικής παραμέτρου  $\rho^2$  συναρτήσει της συχνότητας. Η παράμετρος αυτή εξετάζει την αρνητική στατιστική αξιοπιστία κάθε μεθόδου [12]. Υψηλές τιμές της παραμέτρου  $\rho^2$  δηλώνουν κακή εκτίμηση, ενώ χαμηλές τιμές της  $\rho^2$  δηλώνουν συνεπή εκτίμηση με τα δεδομένα. Για επτά βαθμούς ελευθερίας κάθε τιμή της παραμέτρου  $\rho^2$  μικρότερη από 9.8 ικανοποιεί το διάστημα εμπιστοσύνης επιπέδου 80%.

### 4.1. Μετρήσεις με κατευθυντικούς κυματογράφους

#### 4.1.1. Θεωρητικά πειράματα με φάσματα μίας κορυφής

Η συμπεριφορά των διαφόρων μεθόδων σε κατανομές ενέργειας με μία κορυφή παρουσιάζεται για την περίπτωση της  $\text{sech}^2$  κατευθυντικής κατανομής με  $\beta=1.5$  (σχήμα 2). Η εκτίμηση με την κλασική μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας είναι αρκετά ευρεία. Η κανονικοποιημένη (NMLM) και η επαναληπτική κανονικοποιημένη (INMLM) αναπαριστούν αρκετά καλά το φάσμα, η επαναληπτική (IMLM) και η συνελικτική (CMLM) υστερούν στην εκτίμηση της κορυφής, ενώ η διορθωμένη μέθοδος προσεγγίζει πολύ καλά το φάσμα εκτός της περιοχής της κορυφής του.

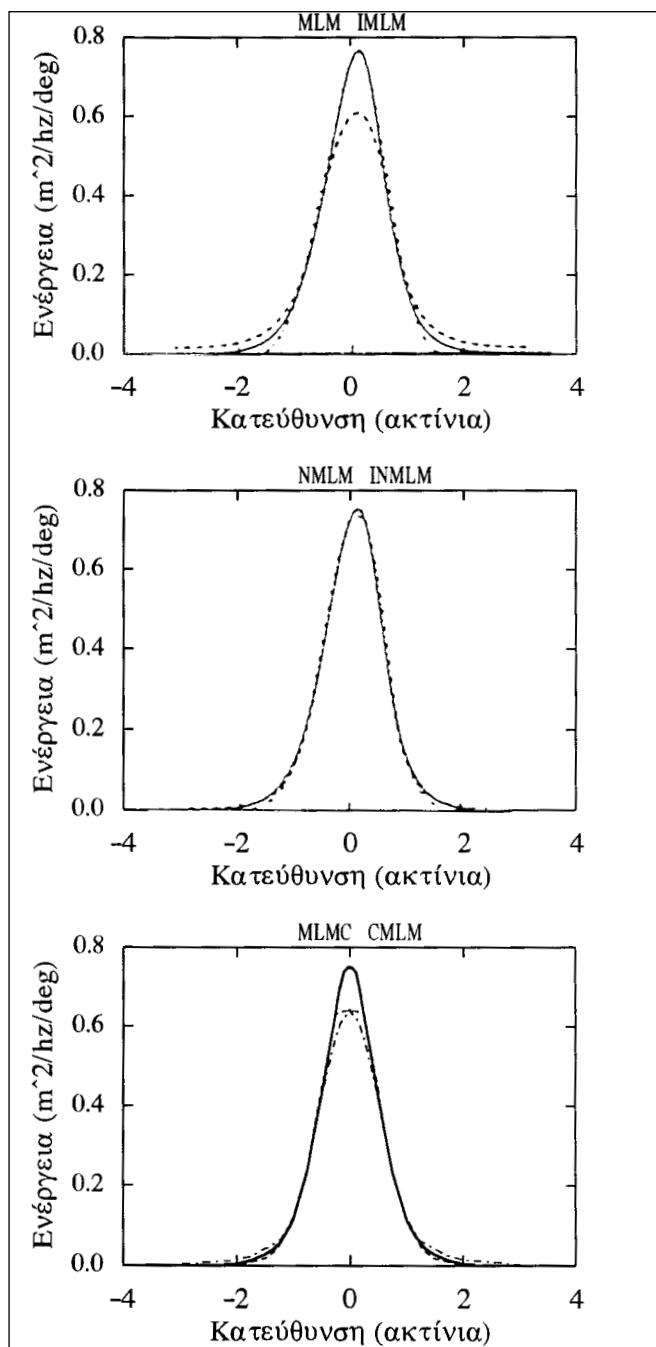
#### 4.1.2. Θεωρητικά πειράματα με φάσματα δύο κορυφών

Στην περίπτωση των φασμάτων με δύο κορυφές η συμπεριφορά των διαφόρων μεθόδων φαίνεται στο σχήμα 3.

Η κλασική μέθοδος προσεγγίζει το πείραμα σε όλες τις δοκιμές, αλλά συστηματικά έχει μεγαλύτερη διασπορά των κατευθύνσεων. Η κανονικοποιημένη (NMLM) έχει ασυνεπή συμπεριφορά, καθώς σε ορισμένες δοκιμές προσεγγίζει αρκετά καλά το πρότυπο-φάσμα, ενώ σε ορισμένες άλλες καθόλου. Γενικά υπερεκτιμά την ενέργεια στις κορυφές του φάσματος. Η συνελικτική (CMLM) βελτιώνει την εκτίμηση της κλασικής σε περιπτώσεις στενών κατευθυντικών κατανομών. Η εκτίμηση της επαναληπτικής (IMLM) είναι αρκετά καλή. Η επαναληπτική κανονικοποιημένη (INMLM), αν και προσεγγίζει αρκετά καλά το πρότυπο-φάσμα, έχει πολύ υψηλές τιμές της στατιστικής παραμέτρου  $\rho^2$  (αρκετές περιοχές με τιμές πάνω από 50). Τέλος, η διορθωμένη μέθοδος δίνει αρκετά οξιόπιστες εκτιμήσεις στις περισσότερες δοκιμές. Οι τέσσερις αριθμοί, που εμφανίζονται στην κορυφή του γραφήματος, είναι οι τιμές της παραμέτρου διασποράς  $\beta$  για τις δύο κορυφές, η απόσταση των δύο κορυφών σε μοίρες και ο λόγος των ενέργειών στις κορυφές του φάσματος.

#### 4.1.3. Δεδομένα πεδίου

Οι νέες μέθοδοι εκτίμησης κατευθυντικών φασμάτων συγκρίνονται με πραγματικά κυματικά δεδομένα που προέρχονται από τον Ατλαντικό και πιο συγκεκριμένα από το Πείραμα Δυναμικής των Επιφανειακών Κυματισμών [21].



Σχήμα 2: Εκτιμήσεις κατευθυντικού φάσματος με μία κορυφή. (-:πρότυπο φάσμα, ---:MLM, NMLM, MLMC, -.-:IMLM, INMLM, CMLM).

Figure 2: Directional spectrum estimates for unimodal distribution.(-:target spectrum, ---:MLM, NMLM, MLMC, -.-:IMLM, INMLM, CMLM).

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στο σχήμα 4 και αναπαριστούν τα βασικά χαρακτηριστικά των μεθόδων, όπως παρατηρήθηκαν και στα θεωρητικά πειράματα. Η τάξη μεγέθους της συχνότητας των κυματισμών είναι από 0 έως 0.35 Hz.

Η κλασική μέθοδος μόλις και αναγνωρίζει το διδιάστατο φάσμα και τις δύο κορυφές. Η συνελικτική αποτελεί μια βελτίωση της κλασικής μεθόδου σε περιπτώσεις στενών κατευθυντικών κατανομών. Η επαναληπτική είναι σχετικά συνεπής με τα δεδομένα. Η κανονικοποιημένη και η επαναληπτική κανονικοποιημένη έχουν ασυνεπή συμπεριφορά από συχνότητα σε συχνότητα, δείχνοντας ότι οι μικρές αλλαγές παράγουν σημαντικές διαφορές στην εκτίμηση του φάσματος. Τέλος, η διορθωμένη μέθοδος δείχνει να αναπαριστά αρκετά καλά το φάσμα.

#### 4.2. Μετρήσεις με μονοπαραμετρικούς κυματογράφους

Για τα πειράματα αυτής της περίπτωσης χρησιμοποιείται η διάταξη μονοπαραμετρικών κυματογράφων σε σχήμα εξαγώνου, δεδομένου ότι υπερέχει της διάταξης του τριγώνου και επίσης διότι υπάρχουν πραγματικά δεδομένα από ανάλογη διάταξη, που είναι εγκατεστημένη στη λίμνη Οντάριο του Καναδά. Η ανάλυση των μετρήσεων γίνεται τόσο με τις άμεσες μεθόδους όσο και με τις ισοδύναμες μεθόδους με δεδομένα από κατευθυντικούς κυματογράφους. Στις “άμεσες μεθόδους” χρησιμοποιούνται οι χρονοσειρές ανύψωσης των έξι κυματογράφων ως δεδομένα εισόδου στην ανάλυση, ενώ στις “ισοδύναμες μεθόδους με κατευθυντικά δεδομένα” υπολογίζονται οι χρονοσειρές κλίσεων από τα πρωτογενή δεδομένα και χρησιμοποιούνται αυτές ως δεδομένα εισόδου στην ανάλυση.

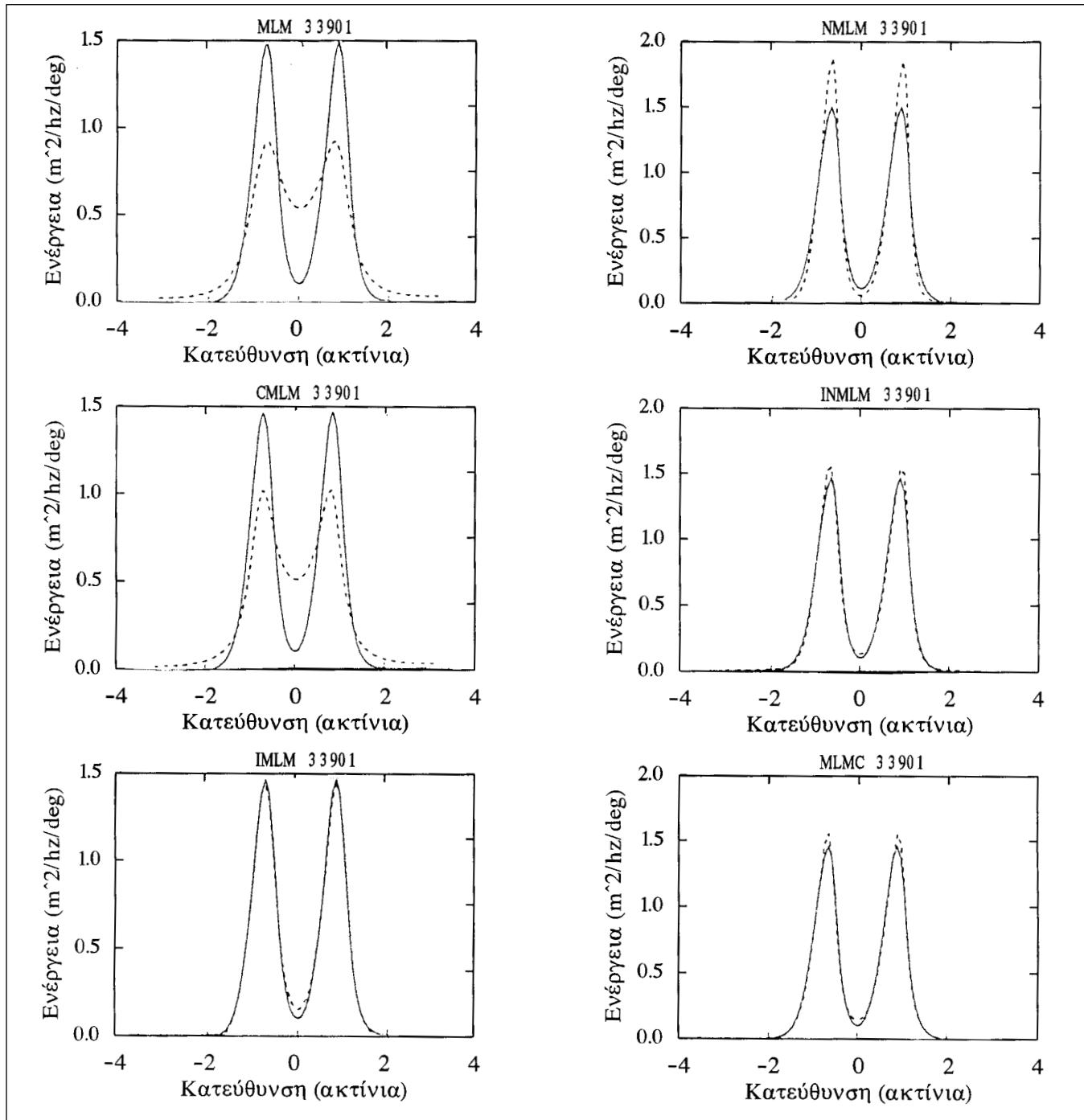
Για τα θεωρητικά πειράματα ισχύουν οι παραδοχές και τα δεδομένα της προηγούμενης περίπτωσης.

##### 4.2.1. Θεωρητικά πειράματα φασμάτων με μία κορυφή

Τα αποτελέσματα των μεθόδων παρουσιάζονται με τη μορφή της στατιστικής παραμέτρου  $\rho^2$  (σχήμα 5) τόσο για τις “άμεσες” μεθόδους όσο και για τις “ισοδύναμες” μεθόδους με τα κατευθυντικά δεδομένα, όπου με πλήρη γραμμή σχεδιάζεται η εκτίμηση της μεθόδου που αναγράφεται αριστερά επάνω και με διακεκομένη γραμμή η δεξιότερα αναγραφομένη μέθοδος. Από το σχήμα 5 φαίνεται ότι όλες οι εκτιμήσεις με τις άμεσες μεθόδους, εκτός από την κλασική μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας, ικανοποιούν το παραδεκτό επίπεδο στατιστικής αξιοπιστίας 80% ( $\rho^2 < 9.8$ ), ενώ με χρήση των ισοδυνάμων μεθόδων (συμβολίζονται από τα ονόματα των μεθόδων και τον αριθμό 2) αυτό ικανοποιείται μόνο από τη διορθωμένη μέθοδο (MLMC2) και την επαναληπτική κανονικοποιημένη (INMLM2).

##### 4.2.2. Θεωρητικά πειράματα φασμάτων με δύο κορυφές

Εδώ παρουσιάζονται τυπικά αποτελέσματα των διαφόρων συνδυασμών για τις εκτιμήσεις με χρήση άμεσων μεθόδων (σχήμα 6).



Σχήμα 3: Εκτιμήσεις κατευθυντικού φάσματος με δύο κορυφές. Κατευθυντικοί κυματογράφοι (-: πρότυπο φάσμα, ---: εκτίμηση φάσματος).

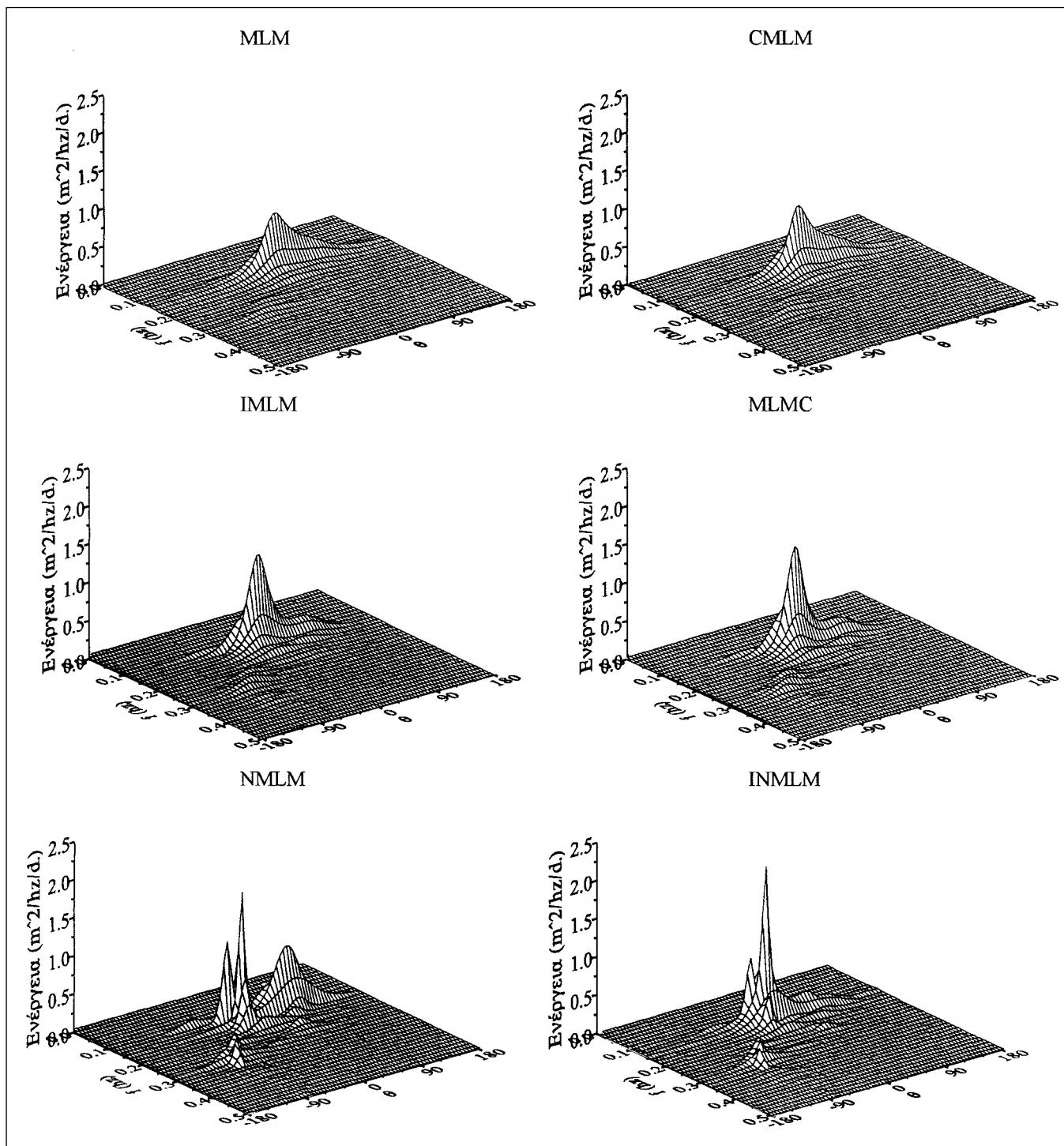
Η κλασική μέθοδος φαίνεται βελτιωμένη σε σχέση με τους κατευθυντικούς κυματογράφους, αλλά εξακολουθεί να έχει ευρεία κατευθυντική κατανομή.

Η κανονικοποιημένη μέθοδος (NMLM) είναι αρκετά καλή, ενώ φαίνεται ότι το σχήμα διορθώσεων ανταποκρίνεται καλύτερα συγκριτικά με την περίπτωση των κατευθυντικών κυματογράφων.

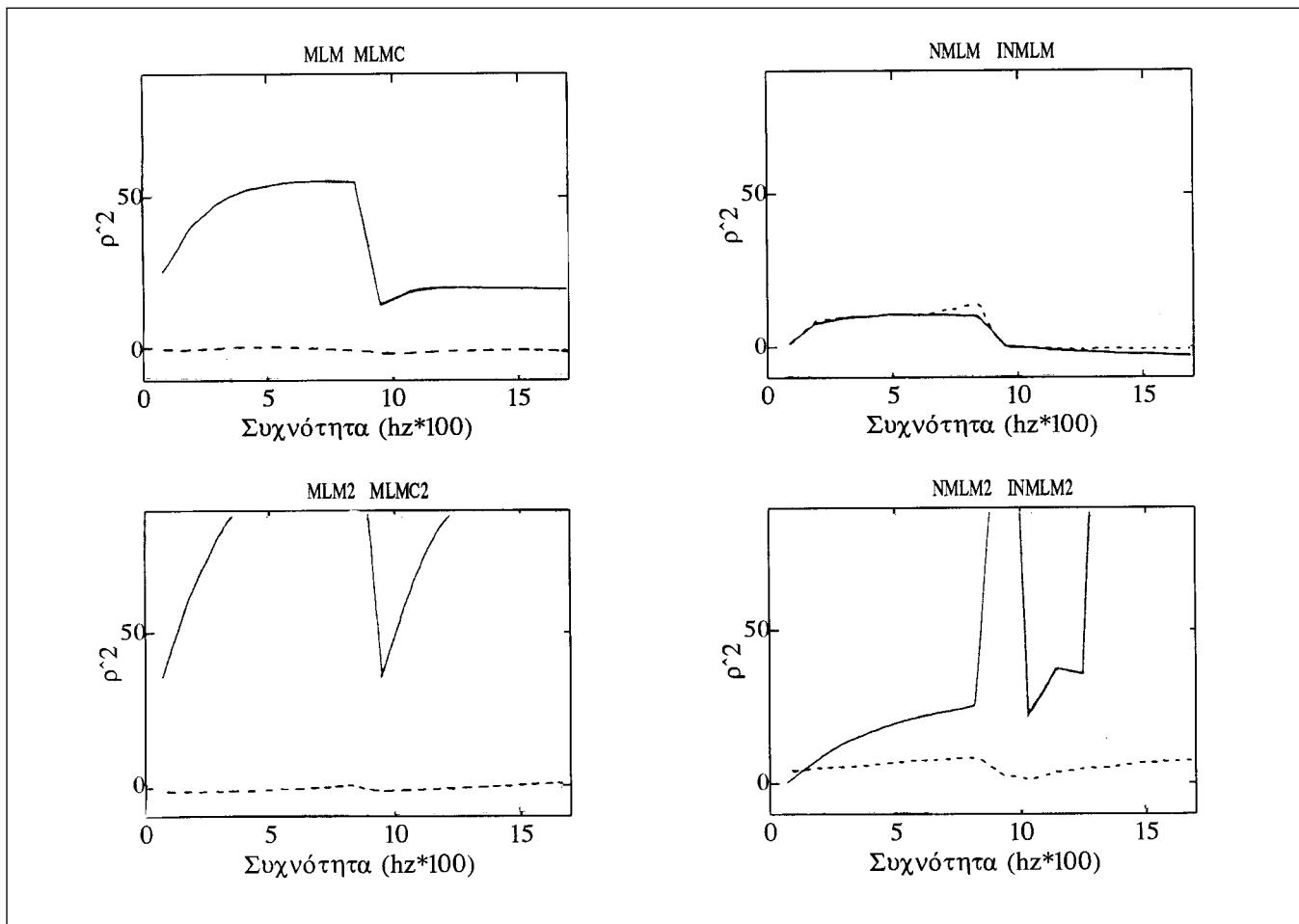
Η επαναληπτική κανονικοποιημένη (INMLM), ενώ δείχνει ότι προσεγγίζει αρκετά καλά το φάσμα, έχει χαμηλή στατιστική αξιοπιστία με μεγάλες τιμές  $\rho^2$  ( $\rho^2=50$ ). Τέλος, η διορθωμένη μέθοδος (MLMC) δίνει πολύ καλά αποτελέσματα.

#### 4.2.3. Δεδομένα πεδίου

Τα δεδομένα προέρχονται από μετρήσεις στη λίμνη



Σχήμα 4: Συγκριτικά αποτελέσματα μετρήσεων πεδίου στον Ατλαντικό Ωκεανό (κατευθυντικοί κυματογράφοι).  
Figure 4: Comparative results for Atlantic Ocean Field data (directional buoys).



Σχήμα 5: Στατιστική  $\rho^2$  για την περίπτωση των φασμάτων με μία κορυφή.

Figure 5:  $\rho^2$  statistics for the unimodal distribution test case.

Οντάριο [20] και αναλύεται μία περίπτωση φάσματος με δύο κορυφές (ανεμογενείς κυματισμοί και αποθάλασσα). Η συχνότητα κορυφής της αποθάλασσας είναι 0.11 Hz και η αντίστοιχη των ανεμογενών κυματισμών είναι 0.46 Hz.

Οι εκτιμήσεις των κατευθυντικών φασμάτων για τις μεθόδους MLM, MLMC, MLM2 και MLMC2 παρουσιάζονται στο σχήμα 7. Οι εκτιμήσεις με χρήση των “ισοδύναμων” μεθόδων δίνουν οξύτερες και μεγαλύτερες κορυφές συγκριτικά με τις άμεσες μεθόδους.

## 5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εκτίμηση των κατευθυντικών φασμάτων θαλασσίων κυματισμών αξιολογήθηκε για έξι διαφορετικές μεθόδους μεγίστης πιθανοφάνειας.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των θεωρητικών πειραμάτων και των συγκρίσεων με δεδομένα πεδίου τόσο από κατευθυντικούς κυματογράφους όσο και από μονοπαραμετρικούς κυματογράφους τοποθετημένους σε σχήμα εξαγώνου, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

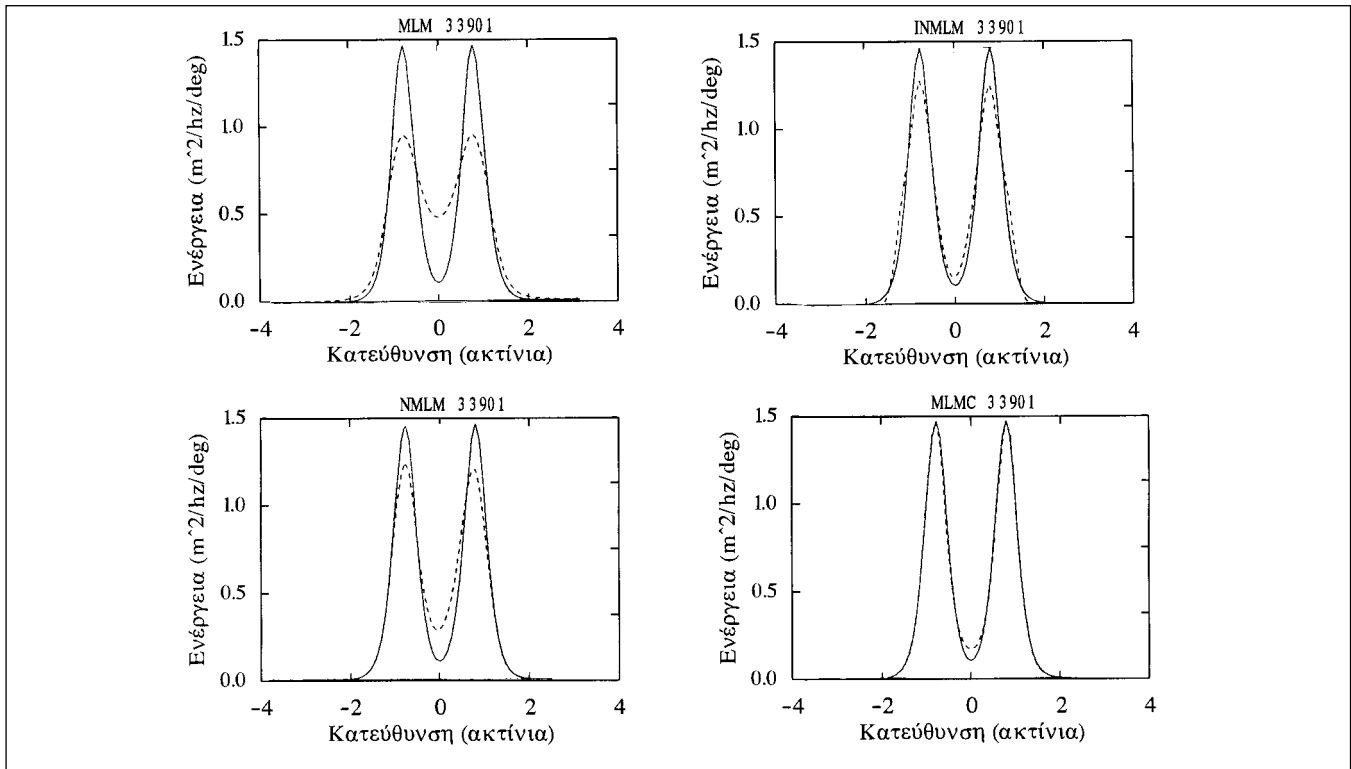
**Η κλασική μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας** αναπαριστά καλά κυρίως τα φάσματα μίας κορυφής, ενώ, αν και αναγνωρίζει τις κορυφές στα φάσματα δύο κορυφών, υποεκτιμά την ενέργειά τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η κατευθυντική τους κατανομή να είναι ευρύτερη.

**Η επαναληπτική μέθοδος** δίνει αρκετά καλές εκτιμήσεις, αν και υπολογιστικά είναι πιο ακριβή μέθοδος.

**Η συνελικτική μέθοδος** αποτελεί μια βελτίωση της κλασικής μεθόδου σε περιπτώσεις στενότερων κατευθυντικών κατανομών.

**Η κανονικοποιημένη μέθοδος** υπερεκτιμά την ενέργεια του φάσματος στις κορυφές και παρουσιάζει ασυνέπεια στην εκτίμηση του φάσματος. Τα αποτελέσματά της βελτιώνονται στην περίπτωση των μονοπαραμετρικών κυματογράφων σε ορισμένη διάταξη.

**Η επαναληπτική κανονικοποιημένη μέθοδος**, αν και προσεγγίζει περισσότερο τη μορφή των φασμάτων, έχει χαμηλή στατιστική αξιοπιστία παράγοντας υψηλές τιμές της στατιστικής παραμέτρου  $\rho^2$ .

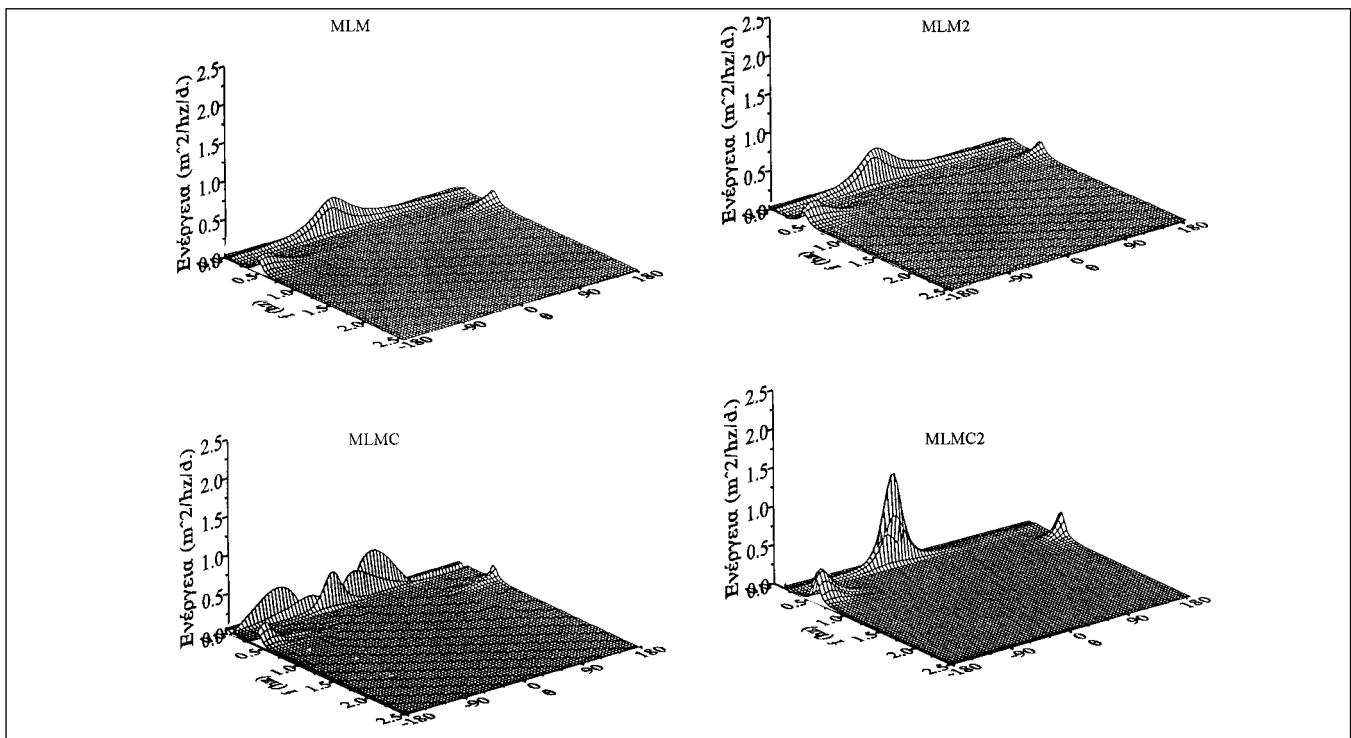


Σχήμα 6: Εκτιμήσεις κατευθυντικού φάσματος με δύο κορυφές - Μέθοδοι MLM, INMLM, NMLM και MLMC.

Μονοπαραμετρικοί κυματογράφοι (-:πρότυπο φάσμα, ---: εκτίμηση φάσματος).

Figure 6: Directional spectrum estimates for bimodal distribution - Methods MLM, INMLM, NMLM and MLMC.

Wave-staff buoys (-:target spectrum, ---:spectrum estimation).



Σχήμα 7: Συγκριτικά αποτελέσματα μετρήσεων πεδίου στη λίμνη Ontario (μονοπαραμετρικοί κυματογράφοι).

Figure 7: Comparative results for Ontario Lake Field data (wave-staff buoys).

Τέλος, η διορθωμένη μέθοδος δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για τα φάσματα που αποκτήθηκαν και με τους δύο δυνατούς τρόπους μέτρησης κατευθυντικών φασμάτων.

## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Brissette, F.P., **Estimation of wave directional spectra and applications to the study of surface gravity water waves**, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, McMaster University, 1992, p. 333.
2. Brissette, F.P. and I.K. Tsanis, "Estimation of wave directional spectra from pitch-roll buoy data", **J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering**, Vol. **20**, No 1, 1994, pp. 93-115.
3. Capon, J., "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis", **Proc. IEEE**, **57**, 1969, 1408-1418.
4. Cartwright, D.E. and Smith, N.D., "Buoy techniques for obtaining directional wave spectra", **Buoy Technology**, D.C., Marine Tech. Soc., 112-121.
5. Donelan, M.A., Hamilton, J., and Hui, W.H., "Directional spectra of wind-generated waves", **Phil. Trans. R. Soc. Lond.**, **A-315**, 509-562.
6. Glad, I.K. and Krogstad H.E., "The Maximum-Likelihood Property of Estimators of Wave Parameters from Heave, Pitch, and Roll Buoys", **J. of Atmospheric and Oceanic Technology**, vol. **9**, No 2, 1992, pp. 169-173.
7. Isobe, M., Kondo, K. and Horikawa, K., "Extension of the MLM for estimating directional wave spectrum", **Symp. on Desc. and Model. of Direc. Seas**, Tech. University, Denmark, A-6, 1984, 1-15.
8. Jefferys, E.R., Watcham, G.T., Ramsden, M.A. and Platts, M.J., "Measuring directional spectra with the MLM", **Proc. Directional Wave Spectra App. Conf.**, University of California, Berkeley, California, 1981, 203-219.
9. Krogstad, H.E., Gordon, R.L. and Miller, M.C., "High-resolution directional wave spectra from horizontally mounted acoustic doppler current meters", **Jour. Atmos. Oceanic Tech.**, **5**, 1988, 340-352.
10. Kuik, A.J., Van Vledder, G.P. and Holthuijsen, L.H., "A method for the routine analysis of pitch and roll buoy data", **J. of Phys. Oceanogr.**, **18**, 1988, 1020-1034.
11. Lacoss, P., "Data adaptive spectral analysis methods", **Geophys.**, **36(4)**, 661-675.
12. Long, R.B., "The statistical evaluation of directional spectrum estimates derived from pitch/roll buoy data", **J. of Phys. Oceanogr.**, **10**, 1980, 944-952.
13. Longuet-Higgins, M.S., Cartwright, D.E., and Smith, N.D., "Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy", **Ocean Wave Spectra**, Prentice-Hall, New-Jersey, 1963, 111-132.
14. Lygre, A., and Krogstad, H.E., "Maximum entropy estimation of the directional distribution in ocean wave spectra", **J. Phys. Oceanography**, **v. 16**, 1986, 2052-2060.
15. Mardsen, R.F. and Juszko, B.A., "An eigenvector method for the calculation of directional spectra from heave, pitch and roll buoy data", **J. Phys. Oceanography**, **v. 17**, 1987, 2157-2167.
16. Mitsuyasu, H., Tasai, F., Sabara, T., Mizuno, S., Okusu, M., Honda, T., and Rikiishi, K., "Observation of the wave directional spectrum using a clover-leaf buoy", **J. Phys. Oceanography**, **v. 5**, 1975, 750-760.
17. Oltman-Shay, J. and Guza, R.T., "A data adaptive ocean wave directional spectrum for pitch/roll type measurements", **J. Phys. Oceanography**, **v. 14**, 1984, 1800-1810.
18. Pawka, S.S., "Island shadows in wave directional spectra", **J. Geophys. Res.**, **88**, 1983, 2579-2591.
19. Tsanis, I.K., Brissette, F.P., "Wave directional spectra studies in Lake Ontario", **J. Great Lakes Res.**, **18(3)**, 1992, 489-506.
20. Tsanis, I.K., Donelan, M.A., "Wave directional spectra in mixed seas", **Proc. 2nd Int. Workshop on Wave Hind. and Forec.**, 1989, 387-396.
21. Weller, R.A., Donelan, M.A., Briscoe, M.G. and Huang, N.E., "Riding the crest: A tale of two wave experiments", **B. of Amer. Meteorol. Soc.**, **72(2)**, 1991, 163-183.
22. Χριστόπουλος Σ., **Ανάπτυξη ανεμογενών κυματισμών - επεξεργασία μετρήσεων και μαθηματικά μοντέλα πρόγνωσης**, διδακτορική διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ., 1989, σ. 153.
23. Yfantis, E.A. and L.E. Borgman, "On the Estimation of the Spreading Function from Ocean Wave Sensors", **Technika Chronika - A**, Vol. **2**, No 1-2, 1982, pp. 25-40.

---

### Σ. Χριστόπουλος,

Δρ πολιτικός μηχανικός, ΥΔΡΟΑΚΤΟΤΕΧΝΙΚΗ, Εθνικής Αντίστασης 3Α, 551 34 Θεσσαλονίκη.

### I. Τσάνης,

Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο McMaster Καναδά.

### F. Brissette,

Αναπληρωτής καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Quebec Καναδά.

*Extended summary*

# New Maximum Likelihood Methods for Estimating Wave Directional Spectra

**S. CHRISTOPOULOS**  
Dr Civil Engineer

**I. TSANIS**  
Professor, Mc Master Univ.

**F. BRISSETTE**  
Assoc. Professor Quebec Un.

## Abstract

Wave directional spectra can be obtained using various techniques, the most significant being the maximum likelihood methods. In this paper a synoptic presentation of new maximum likelihood methods is given and results of wave directional spectra estimations from test cases of unimodal and bimodal spectra as well as from field measurements in a Canadian lake and a region of the Atlantic Ocean are presented.

## 1. INTRODUCTION

Various techniques have been developed to estimate wave directional spectra, which can be classified as direct Fourier transform methods [4, 13, 16, 19, 23], maximum likelihood methods [3, 6, 7, 9, 15, 17, 18, 19] and the maximum entropy method [12].

In this paper the classical, the Iterative and the Convolutional maximum likelihood methods, as well as new maximum likelihood methods, are presented and evaluated through theoretical tests and comparisons with field data.

## 2. MAXIMUM LIKELIHOOD METHODS

### 2.1. Maximum Likelihood Method (MLM)

The classical maximum likelihood method was developed initially to obtain the directional spectrum from measurements taken from an array of wave staff gauges [3]. Cross power spectral density matrices  $C(\omega_k)$  are calculated for each frequency, and then through them the directional spectrum  $\hat{S}(\omega_k, \theta_j)$  is estimated. The method has been extended to the estimation of heave-roll-pitch data by Isobe et al. [7].

### 2.2. Iterative Maximum Likelihood Method (IMLM)

Usually the estimate of the cross power spectral density (CPSD) matrix is different from the original one. In order to resolve this discrepancy an iterative scheme is used to force the directional estimate to be consistent with measured CPSD [9].

Submitted: Aug. 29, 1995 Accepted: Jan. 23, 2001

### 2.3. Convulsive Maximum Likelihood Method (CMLM)

From the implementation of the MLM, it was observed that the estimate had a frequency dependent induced spreading. For the correction of this effect the MLM estimate is convolved by a window function [19].

## 3. NEW MAXIMUM LIKELIHOOD METHODS

The estimations of the directional spectra using the usual methods have characteristics that are dependent on the considered frequency of the spectrum as well as on the considered directional distribution.

### 3.1. Normalized Maximum Likelihood Method (NMLM)

Various MLM methods have been investigated for different values of the spreading parameter  $\beta$  (range 1.24-2.62). The constant overestimation of the MLM (fig. 1) over the entire range of values of the spreading parameter,  $\beta$ , makes it possible to account for it, so that the estimated spectrum tends to a narrower distribution. This is implemented with the normalization of the energy in each direction, according to a normalizing factor  $\zeta$ .

### 3.2. Iterative Normalized Maximum Likelihood Method (INMLM)

The NMLM aims to correct the artificially induced spreading of the MLM. This results in inconsistency with the initial input data. This inconsistency can be resolved using an iterative scheme, where as starting point the NMLM estimation is taken. This scheme forces the convergence of the INMLM using the estimation of the MLM and not the NMLM estimate.

### 3.3. Maximum Likelihood Method Corrected (MLMC)

The NMLM is an empirical one, because it uses a corrective scheme of the MLM. Using a minimization constraint for

the functions  $A(\theta i)$  and the complex phase lag matrices  $X(\theta i)$  the spectrum can be estimated through eq. (3.10), which is absolutely consistent with the cross spectrum matrix of the data [1].

## 4. EVALUATION OF THE NEW METHODS

The new methods are evaluated on the basis of synthetic test cases involving both unimodal and bimodal distribution and on comparisons with field data collected either by arrays of wavestaff or from heave-pitch-roll buoys.

For the synthetic test cases target spectra are constructed using the theoretical spreading function  $\text{sech}^2$ . Then the cross power spectral density matrix is calculated and the directional spectrum is estimated with one of the new methods in order to be compared with the target spectrum. In some cases the value of statistical parameter  $\rho^2$  [12] is calculated. High values of  $\rho^2$  (less than 9.8) indicate consistent estimation.

### 4.1. Heave-Pitch-Roll data

The behaviour of the different methods in unimodal test cases is presented in fig. 2, where the MLM estimate is too wide, NMLM and INMLM are quite close to the spectrum, IMLM and CMLM underestimate the spectrum, while the MLMC is close to the spectrum, except for the peak region.

In bimodal test cases (fig. 3) the MLM estimate systematically has a wider spreading distribution. The NMLM estimate is unstable, as in some test cases it is close to the target spectrum, while in others it is far away. The CMLM improves the MLM estimate. The IMLM estimate is quite good. The INMLM fits the target spectrum well, but has high values of  $\rho^2$  (even larger than so). Finally the MLMC has consistent estimates in the most test cases.

The new methods were compared with field data from the SWADE experiment [21]. The main features of the methods are similar to those produced in the theoretical tests (fig. 4).

### 4.2. Wave Staff data

For this category an array with six wave staff was used, as for the data collected in Lake Ontario. The analysis was done both for the direct methods and the pitch-roll equivalent methods. In the direct methods the six signals were the input data, while in the equivalent methods the heave-pitch-roll timeseries were calculated from the raw data and these were then used as input data.

#### S. Christopoulos,

Dr civil engineer, HYDROMARE, Ethnikis Antistasis 3A, 551 34 Thessaloniki.

#### I. Tsanis,

Professor, Department of Civil Engineering, Mc Master University, 1280 Main Street West, Hamilton, Ontario L8S 4L7.

#### F. Brissette,

Associate professor, Department of Construction Engineering, Ecole de Technologie Supérieure, University of Quebec, 1100 Notre-Dame West, H3C 1K3.

The results from the unimodal test cases are presented through the estimation of values of statistical parameter  $\rho^2$  (fig. 5).

The direct methods, except the MLM, gave satisfactory statistical reliability, whereas in the equivalent methods this criterion was fulfilled only by the INMLM and the MLMC.

In the bimodal test cases (fig. 6) the MLM estimate, although seeming better than the pitch-roll data, still produced a wider distribution. The performance of NMLM was quite good, indicating that the corrective scheme is much more accurate for the six wavestaff data. The performance of INMLM was similar to that of NMLM, having low statistical reliability. The MLMC performed very well, as it reproduced all the model tests almost exactly.

The methods were also compared with field data collected in Lake Ontario for a real bimodal case with windsea and swell. The estimations of MLM and MLMC for both direct and equivalent methods are presented in fig. 7. The equivalent methods' estimates are sharper and give higher peaks compared with the direct methods.

## 5. CONCLUSIONS

Wave directional spectra estimates were evaluated using six different MLM methods. According to the results of the unimodal and bimodal synthetic test cases, as well as the comparison with field data, the following features of each method have been demonstrated:

The MLM reproduces well mainly the unimodal spectra, while in bimodal cases it underestimates the energy at the peaks, having a wider directional spreading.

The IMLM gives quite good estimates, although it is a time consuming method.

The CMLM is an improvement over MLM especially, in cases of narrow spreading functions.

The NMLM overestimates energy at peaks and is unstable, having different behaviour from case to case. The overall performance is better for wavestaff data.

The INMLM, although closer to the spectra, has low statistical reliability with high values of  $\rho^2$ .

Finally, the MLMC gives very good results for both unimodal cases with data obtained from both measuring devices (wavestaff and heave-pitch-roll).