

Πεπλεγμένη Τεχνική Αριθμητικής Επίλυσης Μονοδιάστατης Ροής Ελευθέρας Επιφανείας

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ Γ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

Δρ Πολιτικός Μηχανικός Δ. Π. Θ.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η πεπλεγμένη τεχνική επιλύσεως MacCormack για αγωγούς ελευθέρας επιφανείας. Η τεχνική εφαρμόζεται για μονοδιάστατη υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη ροή. Επίσης, εφαρμόζεται για την επίλυση υδραυλικών αλμάτων για την ανάδειξη των συντηρητικών ιδιοτήτων των διαφορικών εξισώσεων που επιλύονται. Χρησιμοποιούνται οι ημιγραμμικοποιημένες μονοδιάστατες εξισώσεις ελευθέρας επιφανείας με ταυτόχρονη διαγωνιοποίηση για γρηγορότερη σύγκλιση του αλγορίθμου. Γίνονται συγκρίσεις με άλλες υπολογιστικές τεχνικές, ως προς τα αποτελέσματα και τον αναγκαίο αριθμό ανακυκλώσεων για την επίτευξη της σύγκλισης. Η παρούσα τεχνική αναπτύχθηκε το 1982 για την επίλυση των εξισώσεων Navier – Stokes για ασυμπίεστα, ιξώδη ρευστά.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάλυση των μέχρι τώρα προβλημάτων της Μηχανικής των Ρευστών φανερώνει το περιορισμένο πεδίο εφαρμογών των αναλυτικών λύσεων. Η πλειονότητα των πρακτικών προβλημάτων της Ρευστομηχανικής δεν έχουν αναλυτικές λύσεις λόγω της δυσκολίας εφαρμογής των οριακών συνθηκών, που οφείλονται στην περίπλοκη γεωμετρία αλλά και στη μη γραμμικότητα των διαφορικών εξισώσεων του εξεταζόμενου προβλήματος.

Το γεγονός αυτό, με την ταυτόχρονη ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, στάθηκε η αφορμή να αναπτυχθούν πληθώρα αριθμητικών τεχνικών. Οι τεχνικές επεκτάθηκαν στο σύνολο των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κίνηση των ρευστών (υγρά, αέρια), όπως οι εξισώσεις Euler και Navier – Stokes. Αν και οι λύσεις, που εξάγονται με αυτές τις τεχνικές, δίνουν απάντηση μόνο σε έναν ορισμένο αριθμό διακεκριμένων σημείων επί του υπολογιστικού χώρου και μόνο σε συγκεκριμένα διαστήματα, όταν επιλεγεί η κατάλληλη αριθμητική τεχνική σε συνδυασμό με τις κατάλληλες διαφορικές εξισώσεις, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής έχει εφάμιλλες δυνατότητες με τη λύση της φυσικής προσομοίωσης του πεδίου ροής σε κατάλληλα εργαστήρια. Τέλος, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής, εκτός από τη χρησιμότητά του ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων πρακτικού ενδιαφέροντος, συμβάλλει σημαντικά στον έλεγχο ορθότητας των φυσικών

υποθέσεων που συνυπάρχουν στις βασικές ρευστομηχανικές εξισώσεις ή σε απλουστευμένες μορφές τους.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

A	πίνακες ημιγραμμικοποίησης των συναρτήσεων F
Δ	διαφορά
Δ^+, Δ^-	προς τα μπρος και πίσω διαφορά
Δt	χρονικό βήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης
Δx	χωρικό βήμα αριθμητικής ολοκλήρωσης
A	πίνακας ιδιοτιμών
c	ταχύτητα μεταδόσεως κυματισμών
C	συντελεστής τριβής κατά Chezy
E, F	πίνακες στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων
g	επιτάχυνση της βαρύτητας
h	βάθος νερού
L	μήκος αγωγού
n	αριθμός ανακυκλώσεων
n	συντελεστής τριβής κατά Manning
Q	παροχή
S_{ox}	κλίση πυθμένος
S_{fx}	κλίσεις τριβών
u	ταχύτητα κατά τη x διεύθυνση
x	καρτεσιανή συνιστώσα θέσης
z_0	υψόμετρο πυθμένα

3. Η ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΕΧΝΙΚΗ

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μια πεπλεγμένη (implicit) τεχνική επιλύσεως μονοδιάστατης ροής σε ανοικτούς αγωγούς, στηριζόμενη στο αριθμητικό σχήμα MacCormack. Οι εξισώσεις, που επιλύονται, περιγράφουν τη ροή θεωρώντας μέσες τιμές των φυσικών ποσοτήτων κατά το βάθος. Με την παραδοχή ότι η πίεση κατανέμεται υδροστατικά, η ελεύθερη επιφάνεια είναι σχετικά ομαλή. Επίσης, η επίδραση του ανέμου και των δυνάμεων Coriolis θεωρούνται αμελητέες, και το νερό ασυμπίεστο και ομοιογενές. Οι εξι-

σώσεις είναι διατυπωμένες στη συντηρητική τους μορφή, ώστε να μπορούν να περιγράψουν ασυνέχειες ή απότομες μεταβολές του πεδίου ροής [1].

Η αναπτυχθείσα τεχνική ανήκει στην κατηγορία των τεχνικών των πολλαπλών βημάτων (predictor – corrector) και είναι από τις πλέον διαδομένες τεχνικές με ικανότητα επίλυσης σταθερών και μη σταθερών διατμητικών ροών. Έκανε την εμφάνισή της στα μέσα της δεκαετίας του '60 για την επίλυση μονοδιάστατων εξισώσεων και σε ρητή μορφή και έκτοτε αναπτύχθηκε σε πεπλεγμένη για διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα. Η τεχνική περιέχει τους πίνακες ημιγραμμικοποίησης των εξισώσεων καθώς και τους πίνακες διαγωνοποίησης των ανωτέρω πινάκων. Η μέθοδος περιλαμβάνει δύο βήματα στον predictor και δύο βήματα στον corrector. Το πρώτο βήμα χρησιμοποιεί τη ρητή μέθοδο predictor – corrector MacCormack [3]. Σε αυτό το βήμα η μέθοδος προσεγγίζει με εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών ρητής μορφής τις εξισώσεις ροής, με αποτέλεσμα τον περιορισμό του χρονικού βήματος Δt . Το δεύτερο βήμα εξαλείφει αυτό τον περιορισμό μεταφέροντας τις εξισώσεις του πρώτου βήματος σε πεπλεγμένη μορφή.

Σκοπός του αναπτυχθέντος αλγορίθμου ήταν να διαπιστωθούν η ταχύτητα σύγκλισης, η ακρίβεια, καθώς και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων σε μονοδιάστατα προβλήματα. Η τεχνική έχει περιορισμένο πεδίο χρησιμότητας και εφαρμογής λόγω της μονοδιάστατης μορφής, αλλά αναπτύχθηκε με το σκεπτικό ότι η επέκτασή της σε διδιάστατη μορφή θα είναι και αυτή το ίδιο ταχύς ως προς τη σύγκλιση όπως και η μονοδιάστατη. Πλεονέκτημα, το οποίο σε προβλήματα μη σταθερής ροής (μεταφορά φερτών, ρήξη φράγματος) πρέπει να λαμβάνεται υπόψη λόγω του ότι οι ρητές τεχνικές απαιτούν μεγάλο υπολογιστικό χρόνο για την επίτευξη της λύσης. Ως πεπλεγμένη τεχνική έχει τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί μεγαλύτερα χρονικά βήματα, τα οποία συμβάλλουν έτσι, ώστε η λύση να είναι εφικτή με μικρότερο αριθμό ανακυκλώσεων. Επίσης, η διαγωνοποίηση των πινάκων ημιγραμμικοποίησης έχει ως αποτέλεσμα την απλοποίηση του προγραμματισμού, αφού οι εξισώσεις διατυπώνονται με μορφή γινομένου τριών πινάκων, όπου ο μεσαίος πίνακας είναι διαγώνιος.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΗΣ

Οι μονοδιάστατες εξισώσεις ελευθέρως επιφανείας σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων για ορθογωνικούς αγωγούς μεγάλου πλάτους διατυπώνονται όπως [1]:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = Q \quad (4.1)$$

όπου:

$$F = \begin{vmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2 / 2 \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \end{vmatrix}$$

ο πίνακας των ζητούμενων μεταβλητών είναι:

$$E = \begin{vmatrix} h \\ hu \end{vmatrix}$$

Στις ανωτέρω εξισώσεις h είναι το βάθος του νερού, u η αξονική ταχύτητα, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, S_{ox} η κλίση του πυθμένος και S_{fx} είναι οι κλίσεις τριβής. Η κλίση του πυθμένος ορίζεται ως:

$$S_{ox} = \frac{\partial z_0}{\partial x} \quad (4.2)$$

όπου z_0 είναι το υψόμετρο του πυθμένος. Οι κλίσεις της τριβής ορίζονται ως:

$$S_{fx} = \frac{u^2}{hC^2} \quad (4.3)$$

όπου C είναι ο συντελεστής τριβής κατά Chezy. Μία άλλη επιλογή, με την οποία δύναται να υπολογισθούν οι κλίσεις τριβής, είναι:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (4.4)$$

όπου n είναι ο συντελεστής τριβής κατά Manning. Γράφοντας τις εξισώσεις για την αντίσταση της τριβής κατά αυτόν τον τρόπο υποτίθεται ότι η αντίσταση στη ροή οφείλεται μόνο στην τριβή του πυθμένος και παραλείπονται οι τριβές του νερού με τα πρανή (slip conditions).

Το πλεονέκτημα της συντηρητικής μορφής των εξισώσεων (4.1) έναντι της μη συντηρητικής είναι ότι κατά την ολοκλήρωσή τους διατηρούνται οι ποσότητες hu , $hu^2 + gh^2 / 2$, οι οποίες κατά τη φυσική άποψη εκφράζουν μάζα, και την ορμή της μάζας του νερού μοναδιαίας πυκνότητας, η οποία διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από κατακόρυφη διατομή μοναδιαίου πλάτους και ύψους ίσου με το βάθος ροής h κατά τη διεύθυνση x . Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, το οποίο είναι μικτού τύπου, υπερβολικού – παραβολικού τύπου. Με τη λύση των ανωτέρω εξισώσεων είναι δυνατόν να υπολογισθούν η ταχύτητα ροής u και το βάθος ροής h σε κάθε σημείο του πεδίου ροής.

5. ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ, ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΟΗΣ

Ο πίνακας ημιγραμμικοποίησης A των εξισώσεων (4.1) υπολογίζεται παραγωγίζοντας ως προς E τον πίνακα F [2]:

$$A = \frac{\partial F}{\partial E} \quad (5.1)$$

Τελικώς ο πίνακας ημιγραμμικοποίησης A παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Ο πίνακας A μπορεί να διατυπωθεί συναρτήσει των πινάκων διαγωνοποίησης όπως [2]:

$$A = S_A^{-1} A_A S_A \quad (5.3)$$

όπου:

$$S_A^{-1} = \begin{vmatrix} a_1 h/c & a_2 \\ (u+c)a_1 h/c & -a_2(c-u) \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

$$S_A = \begin{vmatrix} (c-u)/2a_1 h & 1/2a_1 h \\ (u+c)/2a_2 c & -1/2a_2 c \end{vmatrix} \quad (5.5)$$

a_1, a_2 τυχαίοι σταθεροί αριθμοί με τιμές εφαρμογών 1.0, διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A .

$$A_A = \begin{vmatrix} u+c & 0 \\ 0 & u-c \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

όπου

$$c = \sqrt{gh}$$

6. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΡΟΗΣ

Οι υπολογισμοί ακολουθούν την παρακάτω διαδικασία [3]:

Predictor

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{βήμα 1.} & \Delta E_i^n = -\Delta t \left(\frac{\Delta^+ F_i^n}{\Delta x} \right) \\ \text{βήμα 2.} & \left(I - \Delta t \frac{\Delta^+ |A|^n}{\Delta x} \right) \delta E_i^* = \Delta E_i^n \\ \text{βήμα 3.} & E_i^* = E_i^n + \delta E_i^* \end{array} \right. \quad (6.1a)$$

Corrector

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{βήμα 4.} & \Delta E_i^* = -\Delta t \left(\frac{\Delta^- F_i^*}{\Delta x} \right) \\ \text{βήμα 5.} & \left(I + \Delta t \frac{\Delta^- |A|^*}{\Delta x} \right) \delta E_i^{n+1} = \Delta E_i^* \\ \text{βήμα 6.} & E_i^{n+1} = 1/2 (E_i^n + E_i^* + \delta E_i^{n+1}) \end{array} \right. \quad (6.1b)$$

όπου:

$$\frac{\Delta^+ Z_i}{\Delta x} = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^- Z_i}{\Delta x} = \frac{Z_i - Z_{i-1}}{\Delta x} \quad (6.2)$$

Στο πρώτο βήμα του predictor υπολογίζεται η ποσότητα ΔE_i^n σύμφωνα με την εξίσωση 6.2. Στο δεύτερο βήμα του predictor υπολογίζονται οι μεταβολές δE_i^* κατά τη i διεύθυνση. Στο τρίτο βήμα του predictor υπολογίζονται οι τελικές τιμές του predictor. Ο corrector ακολουθεί την ανάλογη διαδικασία με τον predictor, με μόνη διαφορά τη φορά σάρωσης του υπολογιστικού δικτύου. Ο μεν predictor για την εύρεση των δE_i^* γίνεται με προς τα εμπρός διαφορές, οπότε η σάρωση γίνεται από την έξοδο προς την είσοδο, στον δε corrector με προς τα πίσω διαφορές και η σάρωση ξεκινάει από την είσοδο προς την έξοδο. $|A|$ είναι ο πίνακας με θετικές ιδιοτιμές ($|u+c|, |u-c|$).

Η παραπάνω ολοκληρωματική τεχνική του δεύτερου βήματος των εξισώσεων (6.1a) και (6.1b) μπορεί να απλοποιηθεί, εάν διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A . Γνωρίζοντας τις ιδιοτιμές του, τότε είναι δυνατόν να αναλυθούν σύμφωνα με την εξίσωση (5.3). Συνολικά η επίλυση του δεύτερου βήματος του predictor γίνεται σε 5 στάδια όπως παρακάτω:

1. $w = \Delta E_i^* + \frac{\Delta t}{\Delta x} |A|_{i+1}^\eta \delta E_{i+1}^*$
2. $X = S_{A_i} w$
3. Υπολογισμός του A_{A_i}
4. $Y = \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A_{A_i} \right)^{-1} X$
5. $\delta E_i^* = S_{A_i}^{-1} Y$

Αφού υπολογιστεί το δE_i^* , εφαρμόζεται το τρίτο βήμα. Το δεύτερο βήμα του corrector (εξίσωση 6.1b) είναι ανάλογο με του predictor. Το μοναδικό μειονέκτημα της παραπάνω

τεχνικής είναι να βρεθούν τα κατάλληλα οριακά μεγέθη της σχέσης για $i = i_{max}$, $i = 1$, λόγω του ότι οι τιμές αυτές είναι άγνωστες, όταν ξεκινάει η σάρωση. Στις εφαρμογές το δE_i^* έλαβε τις τιμές 0.0 στην είσοδο και έξοδο [4]. Η ευστάθεια του περιγραφόμενου αριθμητικού σχήματος καθορίζεται από το κριτήριο CFL που οδηγεί στη σχέση:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{(|u| + c)} \quad (6.3)$$

όπου Δx η απόσταση μεταξύ της ανάντη και κατάντη πλευράς ενός πεπερασμένου στοιχείου, u η ταχύτητα κατά τον άξονα x και $c = \sqrt{gh}$. Συνήθως χρησιμοποιείται η ελάχιστη τιμή των Δx .

7. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ο έλεγχος αξιοπιστίας ενός μαθηματικού ομοιώματος γίνεται κυρίως με αναλυτικές και άλλες αριθμητικές λύσεις. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξεταστεί η αξιοπιστία των υπολογιστικών αποτελεσμάτων. Οι συγκρίσεις έγιναν με δύο διαφορετικές τεχνικές, η μία αφορά σε αυτή του σταθερού βήματος και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, όταν πρόκειται για μονοδιάστατες ροές, και η άλλη τεχνική είναι μία ρητή τεχνική πεπερασμένων όγκων [1].

7.1. Υποκρίσιμη ροή

Για την υποκρίσιμη ροή χρησιμοποιήθηκε ορθογωνικός αγωγός μήκους 17.2 m και πλάτους 7.0 m. Οι αντίστοιχες εφαρμογές αφορούν σε αγωγούς με διάφορες κλίσεις πυθμένος και διαφορετικούς συντελεστές τριβής κατά Chezy. Στην υποκρίσιμη ροή το βάθος εξόδου παραμένει σταθερό, ενώ το βάθος εισόδου και η ταχύτητα εξόδου υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή από εσωτερικούς υπολογιστικούς κόμβους. Η ταχύτητα εισόδου υπολογίζεται από τον τύπο της παροχής $u = Q/bh$, όπου Q η παροχή, b το πλάτος του αγωγού και h το βάθος ροής.

Στο σχήμα 1 δείχνεται ο λόγος του βάθους h προς το βάθος εισόδου h_o . Εφαρμόζονται διαφορετικές κλίσεις πυθμένος και σταθερός συντελεστής τριβής κατά Chezy $C=90$. Το βάθος εξόδου και η παροχή έλαβαν τιμές 0.580 m και 3.5203 m³/sec αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι για κλίσεις πυθμένος από 0.0001 έως και 0.001 οι μεταβολές των βαθών είναι μηδενικές, ενώ για κλίσεις της τάξεως από 0.005 και μεγαλύτερες η μεταβολή του λόγου αυξάνει με μέγιστη τιμή αυτή του 1.7 περίπου για κλίση 0.01. Στο σχήμα 2 δείχνεται ο λόγος του βάθους προς το βάθος εισόδου με σταθερή κλίση πυθμένος και διαφορετικούς συντελεστές τριβής. Η παροχή και το βάθος εξόδου είναι ίδια με την προηγούμενη εφαρμογή. Στο σχήμα 3 δείχνεται ο λόγος των ταχυτήτων προς την ταχύτητα εισόδου (U/U_o).

Στο σχήμα 4 δείχνεται ο αντίστοιχος λόγος. Παρατηρείται ότι για μεγάλους συντελεστές τριβής Chezy $C=1000$ (μικρές απώλειες τριβής πυθμένος) και ως εκ τούτου μικρότερη επίδραση επί των ταχυτήτων, ο λόγος των ταχυτήτων προς την ταχύτητα εισόδου είναι μικρότερος σε σχέση με μικρές τιμές του συντελεστού τριβής Chezy ($C=40$). Στο σχήμα 5 παρουσιάζεται η σύγκριση επί των αριθμών των ανακυκλώσεων μεταξύ της πεπλεγμένης και της ρητής τεχνικής. Το βάθος εξόδου και η παροχή έλαβαν τιμές 0.580 m και 3.5203 m³/sec αντίστοιχα. Ο συντελεστής τριβής έλαβε τιμή $C=90$ και η κλίση του αγωγού $S_{ox} = 0.0001$.

Όπως είναι εμφανές, στο σύνολο των περιπτώσεων η παρούσα μέθοδος είναι ταχύτερη και η σύγκλιση επέρχεται στις 340 ανακυκλώσεις, ενώ αντίστοιχα η ρητή μέθοδος χρειάζεται 3610 ανακυκλώσεις. Στο σχήμα 6 δείχνεται ο ικανός αριθμός των ανακυκλώσεων που απαιτείται από τις δύο μεθόδους. Και στις δύο γραφικές παραστάσεις ο μέσος όρος λάθους υπολογίστηκε βάσει των αζονικών ταχυτήτων σε κάθε ανακύκλωση του αλγορίθμου και επί του συνόλου των κομβικών σημείων του πεδίου ροής.

$$\% \text{ μέσος όρος λάθους} = 100 \sum_{i=1, IMM1} \max error / IMM1$$

όπου:

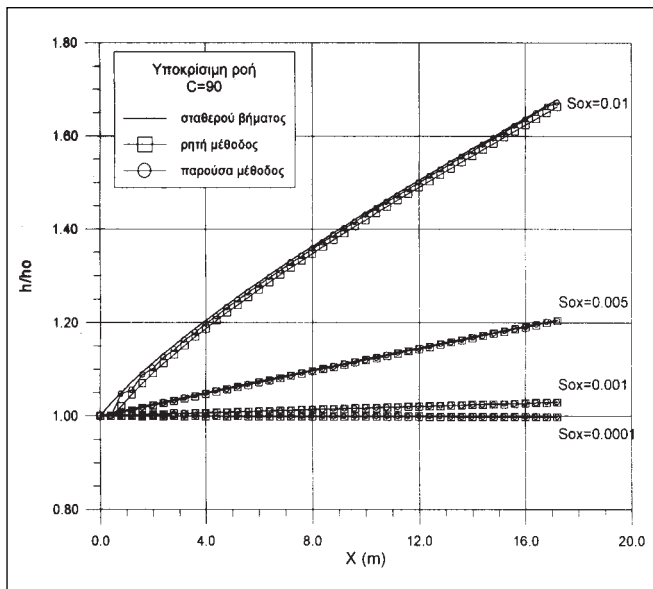
$$\max error = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{u_i^n}$$

7.2. Υπερκρίσιμη ροή

Εν αναφορά με την υπερκρίσιμη ροή χρησιμοποιήθηκε ο ίδιος αγωγός με την υποκρίσιμη ροή, με μόνη διαφορά την αλλαγή των οριακών συνθηκών εισόδου και εξόδου. Στην υπερκρίσιμη ροή στην είσοδο το βάθος ροής και η ταχύτητα λαμβάνουν σταθερή τιμή, ενώ στην έξοδο το βάθος και η ταχύτητα υπολογίζονται από εσωτερικούς υπολογιστικούς κόμβους. Στις παρακάτω εφαρμογές το βάθος εισόδου έλαβε τιμή 0.247 m και το ολικό φορτίο $H_o = 0.7203$ m.

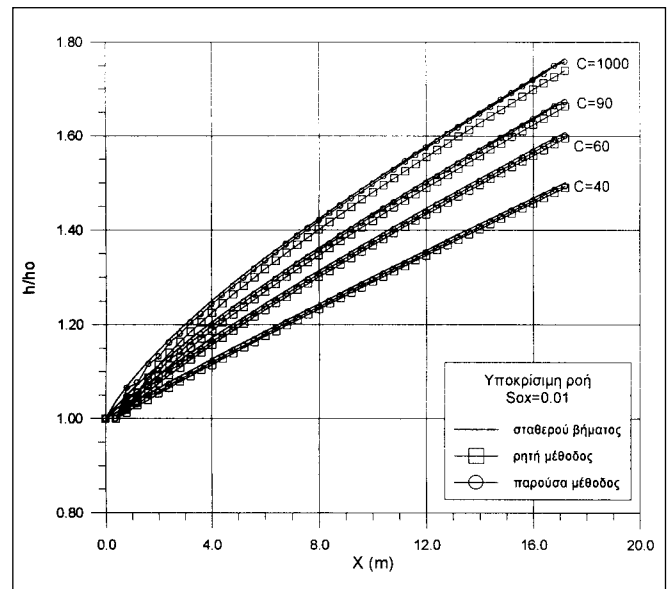
$$(H_o = (u^2/2g) + h).$$

Στο σχήμα 7, όπως και στην υποκρίσιμη ροή, δείχνεται ο λόγος των βαθών προς το βάθος εισόδου. Ο συντελεστής τριβής κατά Chezy διατηρείται σταθερός και μεταβάλλεται η κλίση του πυθμένος. Παρατηρείται ότι για μεγάλες κλίσεις πυθμένος το βάθος του νερού μειώνεται λόγω αύξησης των ταχυτήτων. Στο σχήμα 8 διατηρείται σταθερή η κλίση του πυθμένος και μεταβάλλονται οι συντελεστές της τριβής. Διαπιστώνεται ότι για μικρούς συντελεστές τριβής (μεγάλες τριβές) ο λόγος των βαθών είναι μεγαλύτερος της μονάδας, γεγονός που υποδηλώνει μικρές τιμές των ταχυτήτων στην έξοδο εν αναφορά με την είσοδο. Στα σχήματα 9 και 10 δεί-



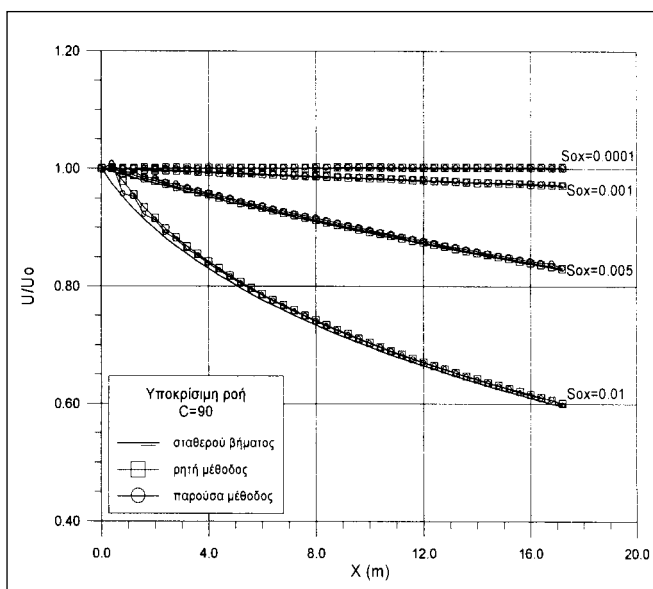
Σχήμα 1: Συγκρίσεις του λόγου h/h_0 για διαφορετικές κλίσεις πυθμένος σε υποκρίσιμη ροή.

Figure 1: The comparisons of ratio h/h_0 for different bottom slopes in subcritical flow.



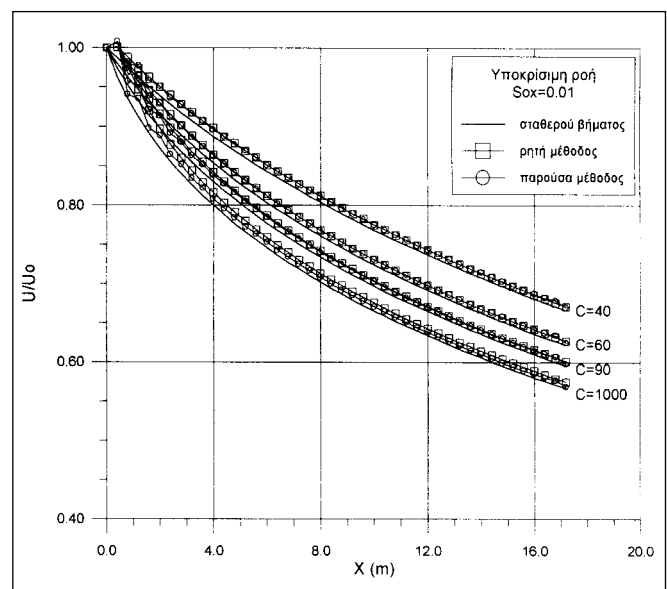
Σχήμα 2: Συγκρίσεις του λόγου h/h_0 για διαφορετικούς συντελεστές τριβής σε υποκρίσιμη ροή.

Figure 2: The comparisons of ratio h/h_0 for different coefficients of friction in subcritical flow.



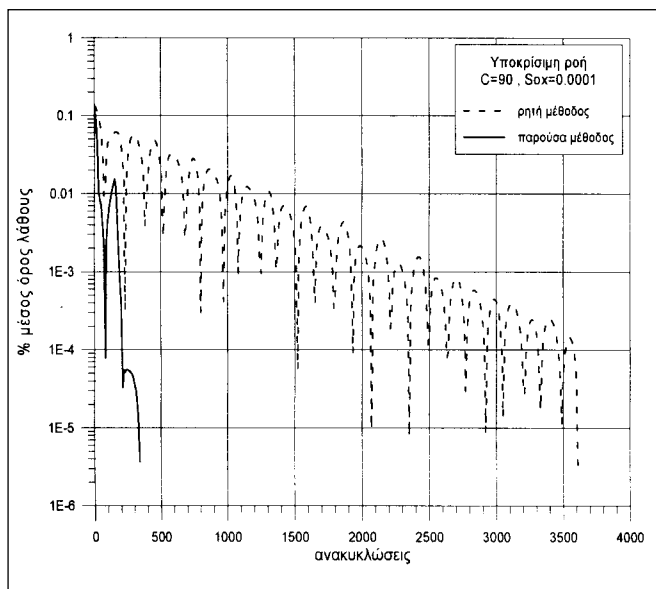
Σχήμα 3: Συγκρίσεις του λόγου U/U_0 για διαφορετικές κλίσεις πυθμένος σε υποκρίσιμη ροή.

Figure 3: The comparisons of ratio U/U_0 for different bottom slopes in subcritical flow.



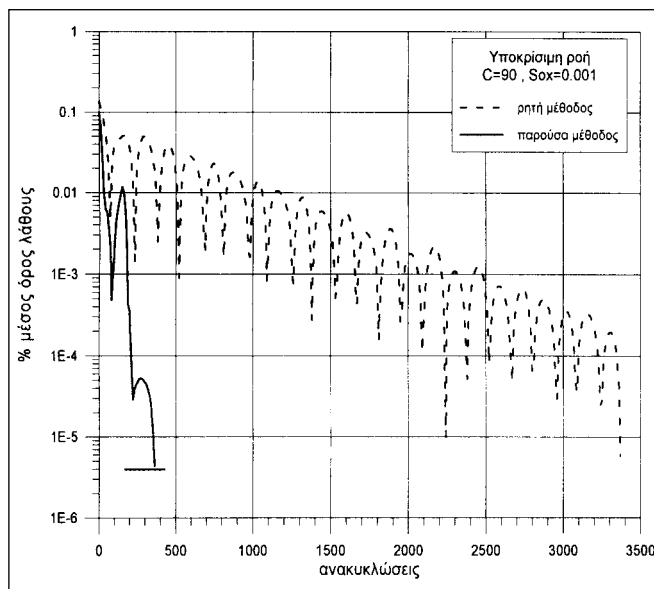
Σχήμα 4: Συγκρίσεις του λόγου U/U_0 για διαφορετικούς συντελεστές τριβής σε υποκρίσιμη ροή.

Figure 4: The comparisons of ratio U/U_0 for different coefficients of friction in subcritical flow.



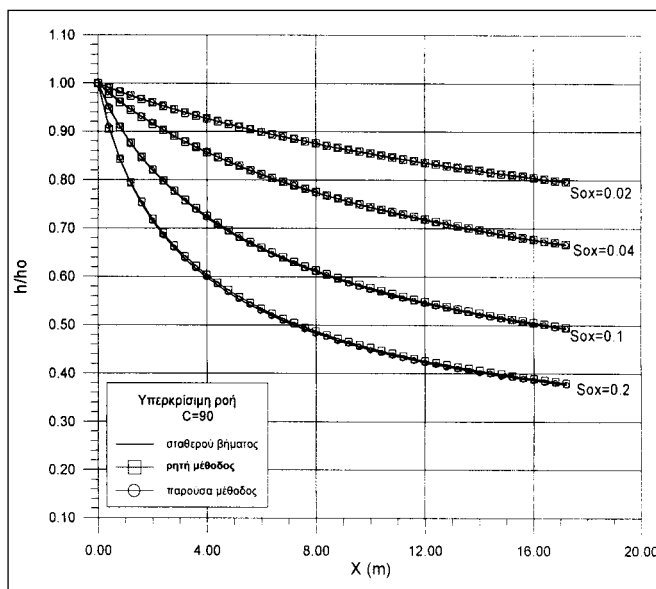
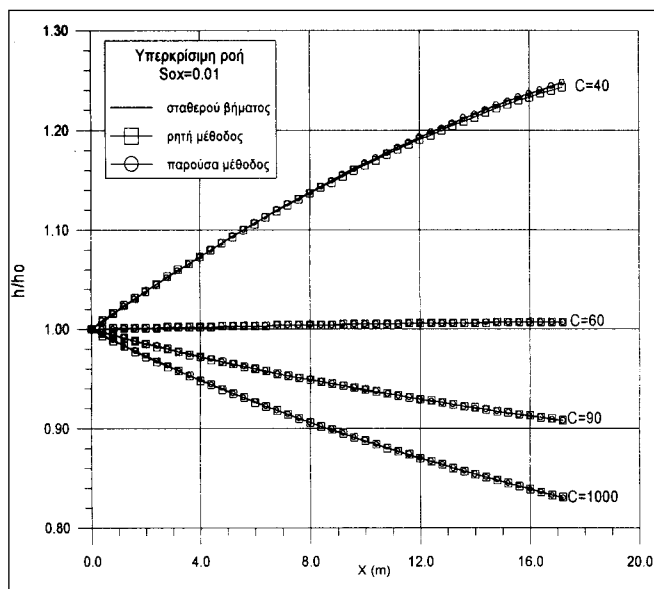
Σχήμα 5: Σύγκλιση αριθμητικών τεχνικών.

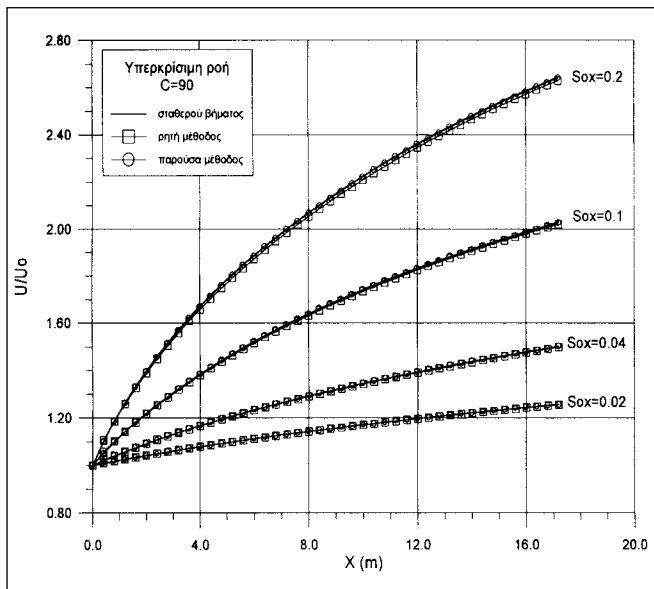
Figure 5: Convergence history of numerical methods.



Σχήμα 6: Σύγκλιση αριθμητικών τεχνικών.

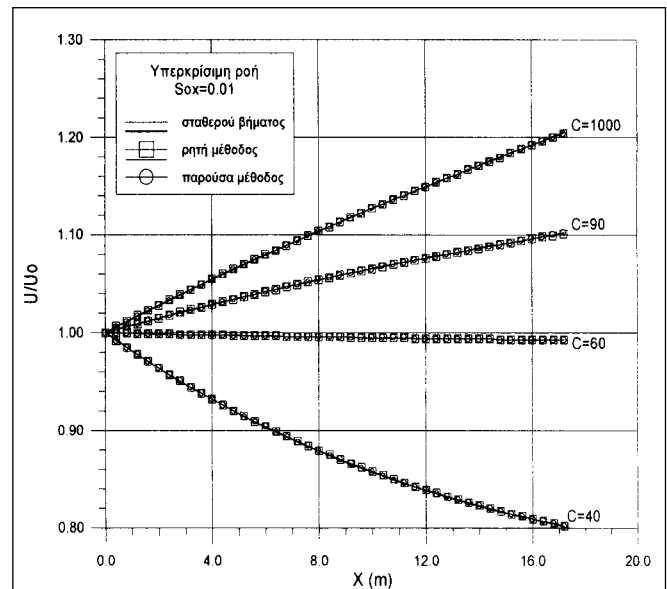
Figure 6: Convergence history of numerical methods.

Σχήμα 7: Συγκρίσεις του λόγου h/h_0 για διαφορετικές κλίσεις πυθμένας σε υπερκρίσιμη ροή.Figure 7: The comparisons of ratio h/h_0 for different bottom slopes in supercritical flow.Σχήμα 8: Συγκρίσεις του λόγου h/h_0 για διαφορετικούς συντελεστές τριβής σε υπερκρίσιμη ροή.Figure 8: The comparisons of ratio h/h_0 for different coefficients of friction in supercritical flow.



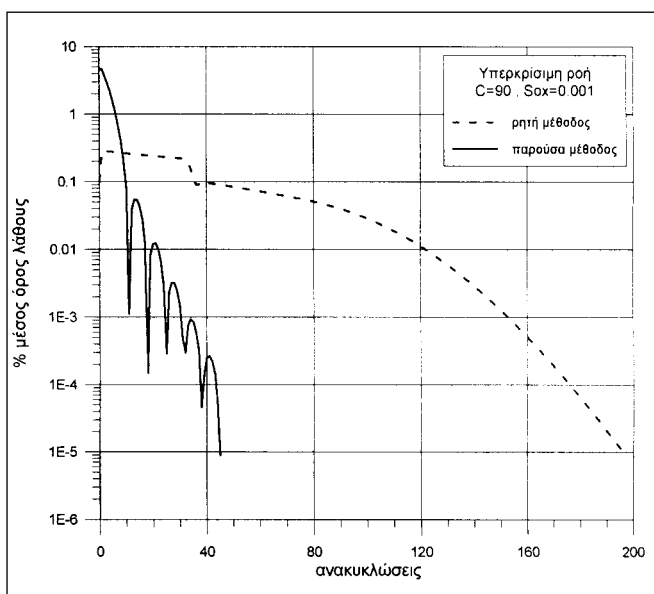
Σχήμα 9: Συγκρίσεις του λόγου U/U_0 για διαφορετικές κλίσεις πυθμένου σε υπερκρίσιμη ροή.

Figure 9: The comparisons of ratio U/U_0 for different bottom slopes in supercritical flow.



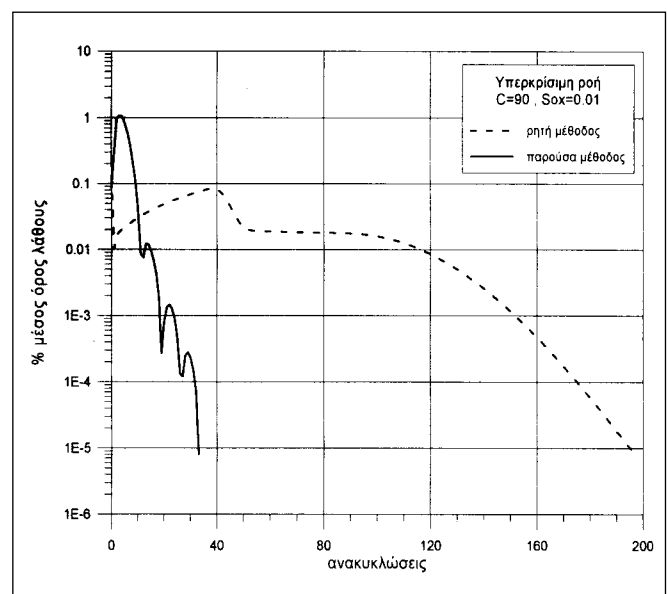
Σχήμα 10: Συγκρίσεις του λόγου U/U_0 για διαφορετικούς συντελεστές τριβής σε υπερκρίσιμη ροή.

Figure 10: The comparisons of ratio U/U_0 for different coefficients of friction in supercritical flow.



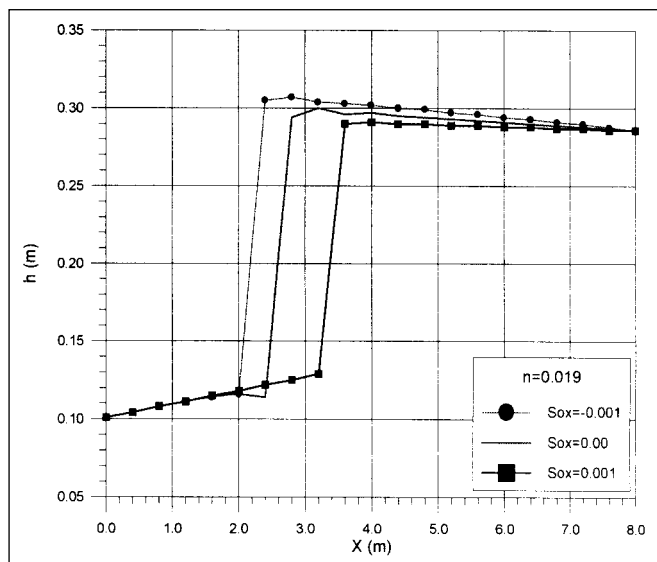
Σχήμα 11: Σύγκλιση αριθμητικών τεχνικών.

Figure 11: Convergence history of numerical methods.



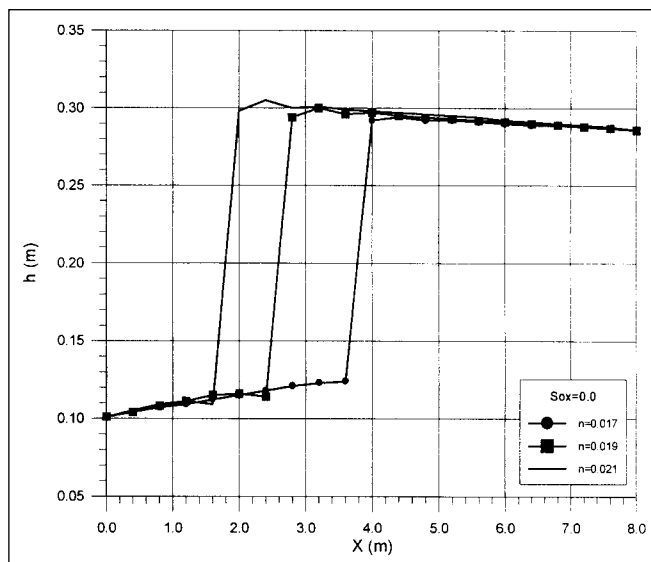
Σχήμα 12: Σύγκλιση αριθμητικών τεχνικών.

Figure 12: Convergence history of numerical methods.



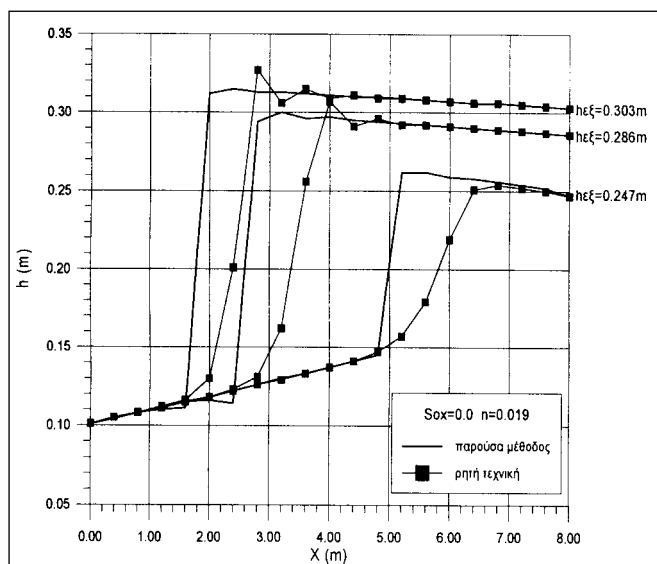
Σχήμα 13: Υπολογισμός υδραυλικού άλματος συναρτήσει της κλίσης του πυθμένου.

Figure 13: Hydraulic jump calculation with connection of channel bottom slopes.



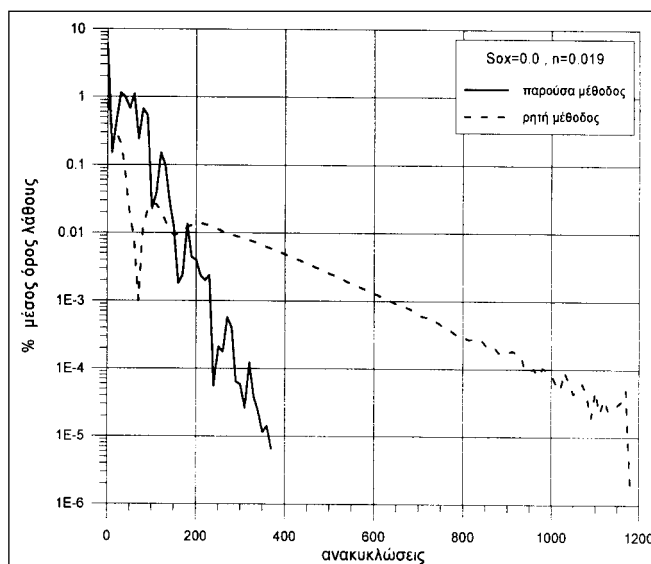
Σχήμα 14: Υπολογισμός υδραυλικού άλματος συναρτήσει του συντελεστή τριβής Manning.

Figure 14: Hydraulic jump calculation with connection of Manning coefficient of friction.



Σχήμα 15: Υπολογισμός υδραυλικού άλματος με την παρούσα και τη ρητή μέθοδο.

Figure 15: Hydraulic jumps calculation with current and explicit methods.



Σχήμα 16: Σύγκλιση αριθμητικών τεχνικών.

Figure 16: Convergence history of numerical methods.

χρονται οι αντίστοιχοι λόγοι των ταχυτήτων για σταθερό συντελεστή τριβής $C=90$ και διαφορετικές κλίσεις πυθμένου (σχήμα 9), και για σταθερή κλίση πυθμένου με διαφορετικούς συντελεστές τριβής (σχήμα 10).

Στα σχήματα 11 και 12 δείχνονται οι αναγκαίες ανακυκλώσεις των αριθμητικών τεχνικών για την επίτευξη λύσεως του υπολογιστικού χώρου. Το κριτήριο σύγκλισης είναι το ίδιο με αυτό της υποκρίσιμης ροής.

7.3. Υδραυλικά άλματα

Όπως προαναφέρθηκε, το προτεινόμενο μαθηματικό ομοίωμα επιλύει τις μονοδιάστατες εξισώσεις ελεύθερας επιφανείας διατυπωμένες στη συντηρητική τους μορφή, ως εκ τούτου έχει τη δυνατότητα επίλυσης και περιγραφής υδραυλικών ασυνεχειών, όπως τα υδραυλικά άλματα. Οι οριακές συνθήκες, που εφαρμόζονται, πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε να δίνεται η δυνατότητα στον αλγόριθμο να μπορεί να δώσει

λύση. Για τον παραπάνω λόγο πρέπει τα βάθη εισόδου και εξόδου να λαμβάνουν σταθερές τιμές σε όλη τη διάρκεια των υπολογισμών. Για τη μεταβλητή της αξονικής ταχύτητας για την είσοδο λαμβάνεται από τον τύπο της παροχής και ως εκ τούτου έχει σταθερή τιμή, για δε την έξοδο από εσωτερικά σημεία ροής. Αυτός είναι ένας τρόπος να διαπιστωθεί αν υπάρχουν διαφορές στην παροχή μεταξύ εισόδου και εξόδου. Οι εφαρμογές αφορούν σε ορθογώνιο αγωγό μήκους 8.0 m και πλάτους 0.25 m με παροχή 0.07 m³/sec και βάθος εισόδου και εξόδου 0.101 m και 0.286 m αντίστοιχα. Οι τριβές υπολογίστηκαν με συντελεστή τριβής κατά Manning.

Στο σχήμα 13 παρουσιάζεται η θέση του υδραυλικού άλματος συναρτήσει της κατά μήκος κλίσης του αγωγού. Οι αντίστοιχες θέσεις, όπου αναπτύσσεται το υδραυλικό άλμα, υπολογίστηκαν με τρεις διαφορετικές κλίσεις πυθμένος, μία αρνητική και ίση με $S_{ox} = -0.001$, μία μηδενική $S_{ox} = 0.0$ και μία θετική $S_{ox} = 0.001$. Ο συντελεστής Manning έλαβε την τιμή $n = 0.019$. Οι αντίστοιχες θέσεις, όπου αναπτύσσεται το υδραυλικό άλμα, είναι $x = 2.0$ m, $x = 2.4$ m και $x = 3.2$ m. Η επίδραση της κλίσεως του αγωγού στην ακριβή θέση, όπου αναπτύσσεται το υδραυλικό άλμα, είναι εμφανής. Η αρνητική κλίση έχει ως αποτέλεσμα το υδραυλικό άλμα να εμφανίζεται πιο κοντά στην είσοδο, ενώ αυξάνοντας την κλίση του αγωγού το άλμα να «ολισθαίνει» προς την έξοδο.

Στο σχήμα 14 χρησιμοποιήθηκε σταθερή κλίση πυθμένος και διαφορετικοί συντελεστές τριβής. Συγκεκριμένα, η κλίση πυθμένος έλαβε μηδενική τιμή, ενώ αντίστοιχα ο συντελεστής τριβής κατά Manning έλαβε τις τιμές $n = 0.017$, $n = 0.019$, $n = 0.021$. Και εδώ παρουσιάζεται μία αντίστοιχη συμπεριφορά ως προς τη θέση του υδραυλικού άλματος. Αυξανόμενου του συντελεστή τριβής (αύξηση των τριβών) η θέση του υδραυλικού άλματος μετατοπίζεται από την έξοδο προς την είσοδο του αγωγού. Συγκεκριμένα, για $n = 0.017$ το άλμα εμφανίζεται στη θέση $x = 3.7$ m, για $n = 0.019$ στη θέση $x = 2.4$ m και για $n = 0.021$ στη θέση $x = 1.7$ m. Στο σχήμα 15 δείχνεται η θέση του υδραυλικού άλματος συναρτήσει του βάθους εξόδου και επίσης συγκρίνεται η θέση του υδραυλικού άλματος που προσδιορίζουν οι δύο μέθοδοι. Και στις τρεις περιπτώσεις η παροχή είναι ίδια (0.07 m³/sec), ο συντελεστής Manning είναι ίσος με 0.019 και η κλίση πυθμένος μηδενική. Η θέση του υδραυλικού άλματος υπολογίζεται και στις δύο περιπτώσεις στην ίδια περίπου θέση, με μόνη διαφορά ότι για τη ρητή μέθοδο πεπερασμένων όγκων [1] η ανάδειξη του υδραυλικού άλματος γίνεται με περισσότερα υπολογιστικά σημεία, με αποτέλεσμα το μέγιστο βάθος να εμφανίζεται μετατοπισμένο ορισμένους κόμβους προς τα δεξιά.

Οι αριθμοί των ανακυκλώσεων, που χρειάζονται οι δύο μέθοδοι για την επίτευξη της λύσης, δείχνονται στο σχήμα 16. Ο αριθμός των ανακυκλώσεων είναι 350 και 1150 αντίστοιχα. Πρέπει να τονισθεί ότι η ρητή τεχνική είναι δύο διαστάσεων, η πεπλεγμένη μίας διάστασης, και αυτό επηρεάζει τον αναγκαίο αριθμό των ανακυκλώσεων μεταξύ των δύο μεθόδων. Επίσης, η επίλυση των υδραυλικών αλμάτων είναι αρκετά δύσκολη λόγω της χρησιμοποίησης του μικρού χρονικού και χωρικού βήματος, με αποτέλεσμα το μεγάλο αριθμό ανακυκλώσεων για την επίλυση του πεδίου ροής.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε μία πεπλεγμένη τεχνική επίλυσης μονοδιάστατης ροής σε ανοικτούς αγωγούς. Σκοπός του αναπτυχθέντος αλγορίθμου ήταν να διαπιστωθούν η ταχύτητα σύγκλισης, η ακρίβεια καθώς και η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων.

Από τα αποτελέσματα διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος είναι αρκετά γρηγορότερη (ως προς τον αριθμό των ανακυκλώσεων) από τη ρητή τεχνική πεπερασμένων όγκων [1].

Από τις γραφικές παραστάσεις η μέθοδος αποδεικνύεται ότι είναι ακριβής σε σύγκριση με άλλες αξιόπιστες αριθμητικές τεχνικές (σταθερού βήματος, ρητή μέθοδος πεπερασμένων όγκων).

Είναι δυνατόν ο αλγόριθμος να επεκταθεί σε δύο διαστάσεις, [5] για ανοικτούς και κλειστούς αγωγούς, και για μόνιμη και μη μόνιμη ροή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Soulis, J. V., "A Numerical Method for Subcritical and Supercritical Open Channel Flow Calculation", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 1991, Vol. 13, pp. 437-464.
2. Hirsch C., "Numerical Computation of Internal and External Flows", 1988, Volume 1, 2, Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons Ltd.
3. MacCormack, R. W., "A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow.", *AIAA Journal*, 1982, Vol. 20, No 9, pp. 1275 -1281
4. Lavante von E. and Thompkins, W. T., "An Implicit, Bidiagonal Numerical Method for Solving the Navier - Stokes Equations", *AIAA Journal*, 1982, Vol. 21, No 6, pp. 828-833.
5. Panagiotopoulos, A.G., Soulis, J. V., "An Implicit Bidiagonal Scheme for Depth Averaged Free - Surface Flow Equations", *J. Hydr. Engrg., A.S.C.E.*, 2000, Vol. 126, No 6, pp. 425-436.

Extended summary

Implicit Scheme for One - Dimensional Free Surface Flow

ALEXANDER G. PANAGIOTOPOULOS

Ph.D. Civil Engineering, D.U.Thr.

Abstract

A general fast implicit numerical scheme, based on MacCormack's two step (predictor - corrector) technique requiring the inversion of only block bidiagonal matrices, was developed and subsequently applied to one-dimensional subcritical and supercritical free - surface flow problems. The main advantage of this method is its rapid convergence. The one - dimensional steady flow was investigated with different bed slopes and friction coefficients. Equations were formulated in conservative form and have the possibility to give solutions in hydraulic jumps. Comparisons with other numerical solutions show that the proposed method is a relatively accurate, fast and reliable.

Finite differences, finite elements and finite volumes numerical techniques are currently available for one and two - dimensional free - surface flow calculations. However, most of these techniques are slow in their convergence. Extra routines had to be incorporated in order to achieve fast convergence. In this paper MacCormack's implicit finite - difference scheme is introduced in order to integrate the equations describing the depth - averaged free - surface flows. The numerical scheme requires the inversion of only block bidiagonal matrices. The scheme was applied to various one - dimensional free surface problems. The method is a promising one in terms of accuracy and fast convergence.

For subcritical flow, a rectangular channel with total length $L=17.2$ m and width $b=7.0$ m was used. Subcritical flow with different bed slopes and friction coefficients was investigated. The applied boundary conditions are: outlet depth constant while axial velocity and inlet depth were calculated with linear interpolations from inside calculated points. The discharge equation was utilized to calculate the inlet velocity. For the current application the outlet depth and discharge were $h=0.58$ m and $Q=3.5203$ m³/sec, respectively.

Figure 1 shows the (h/h_0) comparisons, between the current method, fixed step method, and an explicit finite volume

method developed by Soulis [1]. h_0 is the inlet depth and h the water depth along the channel. The Chezy coefficient is constant and equal to $C=90$, and the bottom slopes takes the values of $S_{ox}=0.0001$, 0.001 , 0.005 , and 0.01 . The ratio increase from inlet to outlet. This is due to the fact that the flow becomes high subcritical at the outlet. Figure 3 shows the (u/u_0) comparisons, where u_0 is the inlet velocity and u the axial velocity along the channel. Predicted results are almost the same. Figure 2 shows the (h/h_0) comparisons with a fixed bottom slope and different friction Chezy coefficients. Figure 4 shows the (u/u_0) comparisons. In this case, too, the predictions are in very good agreement. The convergence history comparison between the predictions is shown in figures 5, 6. The current method is faster than the explicit time marching finite volume technique.

In supercritical flow, the channel geometry is identical to that of the subcritical flow. The boundary conditions in supercritical flow are: constant inlet depth and constant axial velocity. These values are $h=0.247$ m and $u=3.047$ m/sec. The outlet variables h and u were calculated from the inside points.

Figure 7 shows the (h/h_0) comparisons between the current method, the fixed step method, and an explicit finite volume method. The Chezy coefficient is constant and equal to $C=90$, and the bottom slope takes the values $S_{ox}=0.01$, 0.02 , 0.1 , and 0.2 . The predictions between the methods are satisfactory. For supercritical flow, the ratio was decreasing from inlet to outlet because the flow becomes more supercritical at the outlet (in contrast to the subcritical flow). Figure 9 shows the (u/u_0) comparisons. Figure 8 shows the (h/h_0) comparisons with constant bottom slope and different Chezy friction coefficients. For high values of the coefficient C (small friction slopes) the water depth at the outlet is less than at the inlet ($C=1000$, 90 , and 60). For $C=40$ (high friction slope)

the outlet water depth ratio is close to 1.26. Figure 10 shows the (u/u_0) comparisons. In this case, the predictions are also in good agreement. The convergence history comparison between the predictions of the two numerical methods is shown in figures 11, 12. The current method is faster than the explicit time marching finite volume technique. The convergence rate criterion is based on the maximum error of axial velocity change over all the flow field between two succes-

sive iterations. The proposed method is 70.0 % faster (average error $< 10^{-7}$). Figures 13, 14, 15 show the hydraulic jump with connection to channel bottom slopes, Manning coefficient friction and outlet depth respectively. The convergence history comparison between the predictions is shown in fig. 16.