

**ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΠΙΜΕΛΗΤΗΡΙΟ ΕΛΛΑΔΑΣ**

**ΚΑΤΑΡΤΙΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΩΝ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ**

**Β. ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ ΛΕΒΗΤΩΝ ΚΑΙ ΕΓΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΘΕΡΜΑΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: ΘΕ1  
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ  
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ**

**Α΄ έκδοση**

**Αθήνα, Ιούνιος 2011**

**Ομάδα εργασίας θεματικής ενότητας ΘΕ1:**

Κορωνάκη Ειρήνη

Δρ. μηχανολόγος μηχανικός, λέκτορας στο  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.

Σαγιά Ζωή

Διπλ. μηχανολόγος μηχανικός, Ε.Μ.Π., M.Sc.

Τερτίπης Δημήτριος

Διπλ. μηχανολόγος μηχανικός, Ε.Μ.Π., M.Sc.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.	ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ .....	4
1.1.	ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ .....	4
1.1.1.	Μηδενικό Θερμοδυναμικό Αξίωμα - Θερμοκρασία .....	4
1.1.2.	Εντατικά & Εκτατικά μεγέθη.....	5
1.1.3.	Έργο - Θερμότητα.....	5
1.2.	ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ.....	6
1.3.	ΕΝΘΑΛΠΙΑ.....	6
1.4.	ΕΡΓΟ ΟΓΚΟΜΕΤΑΒΟΛΗΣ .....	7
1.5.	ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΡΓΟ .....	7
1.6.	ΠΡΩΤΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ .....	8
1.6.1.	Διατύπωση του 1 <sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για Κλειστά Συστήματα.....	8
1.6.2.	Διατύπωση του 1 <sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για Ανοικτά Συστήματα.....	8
1.7.	ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΡΥΤ - ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ.....	9
1.8.	ΤΕΛΕΙΟ ΑΕΡΙΟ – ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΕΛΕΙΟΥ ΑΕΡΙΟΥ.....	10
1.9.	ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΕΛΕΙΟΥ ΑΕΡΙΟΥ .....	11
1.9.1.	Ισόθλιπτες Μεταβολές Τελείου Αερίου.....	11
1.9.2.	Ισόογκες Μεταβολές Τελείου Αερίου .....	12
1.9.3.	Ισοθερμοκρασιακές Μεταβολές Τελείου Αερίου .....	12
1.9.4.	Αδιαβατικές Μεταβολές Τελείου Αερίου.....	13
1.9.5.	Κυκλικές Μεταβολές.....	14
1.10.	ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ.....	18
1.10.1.	Εντροπία.....	19
1.10.2.	Εντροπικά Διαγράμματα – Εντροπικός Βαθμός Απόδοσης .....	20
1.11.	ΘΕΩΡΙΑ ΑΤΜΩΝ – ΠΙΝΑΚΕΣ ΝΕΡΟΥ & ΥΔΡΑΤΜΟΥ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MOLLIER.....	21
2.	ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	25
2.1.	ΚΥΚΛΟΣ CARNOT – ΨΥΚΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ CARNOT – ΑΝΤΛΙΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ .....	25
2.2.	ΚΥΚΛΟΣ CLAUSIUS - RANKINE .....	30
2.2.1.	Κύκλος Κεκορεσμένου Ατμού .....	30
2.2.2.	Κύκλος Υπέρθερμου Ατμού.....	32
2.2.3.	Κύκλος Υπέρθερμου Ατμού με Αναθέρμανση .....	34
2.3.	ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΕΡΙΟΣΤΡΟΒΙΛΩΝ – ΚΥΚΛΟΙ ERICSSON & JOULE - BRAYTON .....	36
2.4.	ΚΥΚΛΟΣ ΟΤΤΟ.....	41
2.5.	ΚΥΚΛΟΣ DIESEL.....	44
3.	ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ .....	47
3.1	ΜΟΡΦΕΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ .....	47
3.2	ΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ.....	50
3.2.1	Αγωγή θερμότητας μέσω επίπεδου σώματος .....	50
3.2.2	Αγωγή θερμότητας μέσω κυλινδρικού σώματος.....	51
3.2.3	Συντελεστής ειδικής θερμικής αγωγιμότητας υλικού.....	53
3.3	ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ.....	55
3.3.1	Εξίσωση συναγωγής θερμότητας .....	55
3.3.2	Συντελεστής συναγωγιμότητας ρευστού-αριθμός Nusselt .....	58
3.3.3	Εξαναγκασμένη συναγωγή.....	61
3.4	ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ.....	62

3.4.1	Χαρακτηριστικά θερμικής ακτινοβολίας .....	62
3.4.2	Μέλαν σώμα–Νόμος Stefan-Boltzmann .....	62
3.4.3	Νόμος Kirchoff-Συντελεστής εκπομπής .....	64
3.4.4	Συντελεστής μεταφοράς θερμότητας με ακτινοβολία.....	65
3.5	ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ .....	67
3.6	ΕΝΑΛΛΑΚΤΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ .....	70
3.6.1	Θερμική μελέτη εναλλακτών θερμότητας-Μέθοδος LMTD .....	73
3.6.2	Θερμική μελέτη εναλλακτών θερμότητας- Μέθοδος NTU.....	77
3.6.3	Βασικά στοιχεία για το σχεδιασμό εναλλακτών θερμότητας.....	80
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		81

## 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

Αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι η εισαγωγή στις βασικές έννοιες της Θερμοδυναμικής. Η εισαγωγή αυτή είναι χρήσιμη για τη δημιουργία ενός γνωστικού πλαισίου, απαραίτητου για την κατανόηση των συστημάτων παραγωγής ισχύος και των θερμαντλιών.

### 1.1. ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ

Η εξέταση των φαινομένων της θερμοδυναμικής πραγματοποιείται εντός πεπερασμένων ορίων, των **συστημάτων**. Ως σύστημα μπορεί να θεωρηθεί οποιοδήποτε αντικείμενο, περιοχή, τμήμα του σύμπαντος εν γένει, το οποίο εξετάζεται ξεχωριστά από το **περιβάλλον** του, η δε εξέτασή του γίνεται από μακροσκοπική άποψη και όχι από μικροσκοπική (δηλαδή, δεν εξετάζονται οι λεπτομέρειες της ύλης, αλλά μόνο τα γενικά χαρακτηριστικά αυτής, οι λεγόμενες **θερμοδυναμικές παράμετροι**, π.χ. η πίεση, η θερμοκρασία κ.α.). Ανάλογα με το πώς το **όριο** του συστήματος διαχωρίζει αυτό από το περιβάλλον του, ένα σύστημα μπορεί να είναι:

- **κλειστό**, δηλαδή να εμπεριέχει σταθερή ποσότητα **μάζας**, αλλά μπορεί να συναλλάσσει θερμότητα ή/και έργο με το περιβάλλον του
- **ανοιχτό**, όπου επιτρέπεται η συναλλαγή μάζας, αλλά επίσης μπορεί να συναλλάσσει θερμότητα ή/και έργο με το περιβάλλον του
- **αδιαβατικό**, το οποίο δε συναλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον του.
- **απομονωμένο**· στην περίπτωση αυτή, το σύστημα δε συναλλάσσει μάζα, θερμότητα και έργο με το περιβάλλον του.

Για λόγους απλότητας, τα συστήματα θεωρούνται κατά κανόνα **ισοθερμοκρασιακά**, δηλαδή έχουν την αυτή θερμοκρασία σε όλα τα σημεία τους, η δε θερμοκρασία μπορεί να μεταβάλλεται χρονικά.

Όταν σε ένα απομονωμένο σύστημα δεν πραγματοποιούνται εσωτερικές μεταβολές (π.χ. πίεσης), τότε στο σύστημα έχει αποκατασταθεί **κατάσταση ισορροπίας**. Ένα κλειστό σύστημα (που αλληλεπιδρά θερμικά με το περιβάλλον του) μπορεί να φτάσει σε εσωτερική ισορροπία, αλλά και σε ισορροπία με το περιβάλλον του. Η θερμική ισορροπία είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη Θερμοδυναμική και επιτυγχάνεται όταν η θερμοκρασία του συστήματος σταθεροποιείται. Όταν εκτός της θερμικής ισορροπίας δεν πραγματοποιούνται συναλλαγές έργου και χημικές αντιδράσεις (που ορίζουν τη μηχανική και τη χημική ισορροπία, αντίστοιχα), τότε το σύστημα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

#### 1.1.1. Μηδενικό Θερμοδυναμικό Αξίωμα - Θερμοκρασία

Η έννοια της θερμικής ισορροπίας χρησιμοποιείται στη διατύπωση του **μηδενικού θερμοδυναμικού αξιώματος**, βάσει του οποίου, εάν δύο συστήματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία προς ένα τρίτο, τότε βρίσκονται σε θερμική ισορροπία και μεταξύ τους. Αν π.χ. το «τρίτο σύστημα» είναι ένα θερμόμετρο και διαπιστωθεί ότι τα δύο συστήματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία προς το τρίτο (δηλαδή, το θερμόμετρο), τότε μπορεί να διαπιστωθεί και η θερμική ισορροπία μεταξύ τους. Αυτή, ακριβώς, είναι η σημασία του μηδενικού θερμοδυναμικού αξιώματος: έχει, πλέον, καταστεί δυνατός ο ορισμός της **θερμοκρασίας**.

Η θερμοκρασία «ορίζεται» από τη διάκριση των σωμάτων σε θερμά ή ψυχρά. Αν, για παράδειγμα, ως αναφορά τεθεί το ανθρώπινο σώμα, τότε τα σώματα διακρίνονται σε θερμότερα ή ψυχρότερα του

ανθρώπινου σώματος. Η διάκριση αυτή είναι μάλλον αυθαίρετη, μιας και τα αισθητήρια όργανα δε μπορούν να προσδιορίσουν κατά πόσο ακριβώς θερμότερο ή ψυχρότερο είναι ένα σώμα. Μπορεί ωστόσο να περιγραφεί ως τώρα ποιοτικά η θερμοκρασία: σώμα θερμότερο έχει **μεγαλύτερη** θερμοκρασία, ενώ σώμα ψυχρότερο έχει **μικρότερη** θερμοκρασία.

Δημοφιλής κλίμακα για τη μέτρηση των θερμοκρασιών είναι η **κλίμακα Κελσίου**, η οποία ορίζεται από το σημείο 0°C (που αντιστοιχεί σε ισορροπούν μείγμα νερού και πάγου σε ατμοσφαιρική πίεση) και το σημείο 100°C (που αντιστοιχεί σε ισορροπούν μείγμα νερού και υδρατμού σε ατμοσφαιρική πίεση). Υποδιαιρώντας την ενδιάμεση περιοχή σε 100 ίσα σημεία και προεκτείνοντάς την ομοιόμορφα πέραν των δύο σημείων ορισμού, η κλίμακα μπορεί να περιγράψει οποιαδήποτε θερμοκρασία.

Μειονέκτημα της κλίμακας Κελσίου είναι το γεγονός ότι αποτελεί μια **εμπειρική** κλίμακα, όχι ικανή να χρησιμοποιηθεί στη Θερμοδυναμική. Το μειονέκτημα αυτό αίρεται με τη χρήση των **θερμοδυναμικών κλιμάκων** θερμοκρασίας ή **κλιμάκων απόλυτης θερμοκρασίας**. Στη συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη κλίμακα απόλυτης θερμοκρασίας, μονάδα μέτρησης της θερμοκρασίας είναι το **Kelvin**, το οποίο ορίζεται ανεξάρτητα από τις ιδιότητες οποιουδήποτε σώματος και συσχετίζεται με την κλίμακα Κελσίου βάσει της απλής σχέσης

$$T[K] = t[{}^{\circ}C] + 273.15 \quad (1.1)$$

### 1.1.2. Εντατικά & Εκτατικά μεγέθη

Τα μεγέθη που έχουν αναφερθεί μέχρι στιγμής δεν είναι τα μόνα που χρειάζονται για να προσδιορίσουν τη θερμοδυναμική κατάσταση ενός συστήματος. Ένα άλλο ιδιαίτερα χρήσιμο μέγεθος είναι ο **όγκος**.

Ανάλογα με το αν ένα μέγεθος μπορεί να αναχθεί σε μάζα 1kg του υλικού του συστήματος, τα μεγέθη ταξινομούνται σε **εκτατικά** (όταν μπορούν να αναχθούν) και σε **εντατικά** (όταν δε μπορούν). Η πίεση και η θερμοκρασία είναι εντατικά μεγέθη, ενώ αντίθετα, ο όγκος εξαρτάται από το μέγεθος του συστήματος, μπορεί να αναχθεί σε 1kg αυτού και αποτελεί εκτατικό μέγεθος. Διαιρώντας, μάλιστα, τον όγκο με τη μάζα του συστήματος, προκύπτει ο **ειδικός όγκος** (ο οποίος αποτελεί εντατικό μέγεθος, καίτοι προκύπτει από ένα εκτατικό μέγεθος). Προκειμένου να διακρίνονται τα εκτατικά μεγέθη σε απόλυτα και ειδικά, χρησιμοποιούνται αντίστοιχα κεφαλαία και πεζά γράμματα, π.χ. αν  $m$  είναι η μάζα του συστήματος, τότε ισχύει:

$$v \equiv \frac{V}{m} \quad (1.2)$$

### 1.1.3. Έργο - Θερμότητα

Το **έργο** στη Θερμοδυναμική αποτελεί ένα σημαντικό μέγεθος, όμως ο κλασικός ορισμός του μηχανικού έργου δεν καλύπτει όλες τις περιπτώσεις που μελετά η Θερμοδυναμική, μιας και υπάρχουν μηχανές παραγωγής και διακίνησης έργου, χωρίς μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης. Για παράδειγμα, ένας μετασχηματιστής αποτελεί τυπικό παράδειγμα διάταξης που μεταφέρει έργο, χωρίς να μετακινεί κάποιο σημείο εφαρμογής δύναμης. Για τις ανάγκες της Θερμοδυναμικής, λοιπόν, το έργο είναι η αλληλεπίδραση δύο συστημάτων, κατά την οποία οι μεταβολές σε καθένα από αυτά, εκατέρωθεν του διαχωριστικού του ορίου, μπορούν να επαναληφθούν χωρίς την εμφάνιση άλλης μεταβολής έξω από αυτά, εκτός από τη μεταβολή του ύψους ενός βάρους για το καθένα τους. Για την

προσήμανση του έργου, εφαρμόζεται η σύμβαση ότι το **παραγόμενο** μηχανικό έργο από ένα σύστημα φέρει **θετικό** πρόσημο, ενώ το **καταναλισκόμενο** μηχανικό έργο φέρει **αρνητικό** πρόσημο.

Η **θερμότητα**, όπως εξάλλου και το έργο, αποτελεί μιας μορφής ενέργεια που διαπερνά το όριο μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος. Η μετάδοση της θερμότητας είναι απόρροια της θερμοκρασιακής διαφοράς μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος, με τρόπους που θα αναλυθούν στο εδάφιο 3 της παρούσας Εκπαιδευτικής Ενότητας.

Η θερμότητα όπως και το έργο είναι ποσότητες προσημασμένες και εφαρμόζεται η σύμβαση ότι η **προσδιδόμενη** θερμότητα σε ένα σύστημα φέρει **θετικό** πρόσημο, ενώ η **αποριπτόμενη** θερμότητα από ένα σύστημα φέρει **αρνητικό** πρόσημο.

## 1.2. ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ

Η **εσωτερική ενέργεια** αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο για τη Θερμοδυναμική εκτατικό μέγεθος, το οποίο φέρει διαστάσεις ενέργειας. Ορίζεται ως η συνισταμένη όλων των επιμέρους ενεργειών ενός συστήματος, και συγκεκριμένα της κινητικής ενέργειας των κινούμενων μορίων, της δυναμικής ενέργειας των ενδομοριακών και ενδοατομικών δυνάμεων και της ενέργειας κάθε άλλου επιδρούντος πεδίου.

Η εσωτερική ενέργεια αποτελεί καταστατικό μέγεθος, η δε τιμή της εξαρτάται από αριθμό θερμοδυναμικών μεταβλητών, όσων ορίζουν την κατάσταση του αντίστοιχου θερμοδυναμικού συστήματος. Όταν το σύστημα υφίσταται απειροστή μεταβολή της κατάστασής του, επειδή η τελική τιμή της εσωτερικής ενέργειας δεν εξαρτάται από το δρόμο της διεργασίας, η απειροστή μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι τέλειο διαφορικό. Συγκεκριμένα, ειδική εσωτερική ενέργειας μπορεί να γραφτεί ως συνάρτηση του ειδικού όγκου και της θερμοκρασίας και το διαφορικό είναι

$$du = \left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_T \cdot dv + \left. \frac{\partial u}{\partial T} \right|_v \cdot dT \quad (1.3)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στη Θερμοδυναμική δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον κάποια απόλυτη τιμή της εσωτερικής ενέργειας, παρά μόνο η μεταβολή της κατά μια δεδομένη διεργασία.

## 1.3. ΕΝΘΑΛΠΙΑ

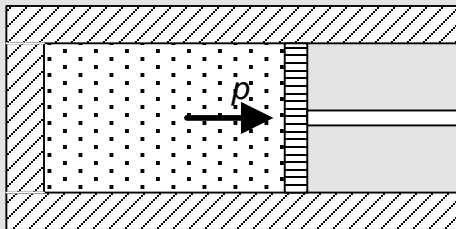
Η έννοια της **ενθαλπίας** είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και διαδεδομένη σε ενεργειακά προβλήματα και θερμικούς υπολογισμούς. Η ενθαλπία ενός συστήματος με εσωτερική ενέργεια  $U$ , πίεση  $p$  και όγκο  $V$  είναι εξ' ορισμού ίση με

$$H = U + p \cdot V \quad (1.4)$$

Η ενθαλπία έχει διαστάσεις ενέργειας και αποτελεί εκτατικό και καταστατικό μέγεθος.

### 1.4. ΕΡΓΟ ΟΓΚΟΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Το έργο ογκομεταβολής αποτελεί μια περίπτωση μηχανικού έργου που χρησιμοποιείται στη Θερμοδυναμική και περιγράφει το έργο που συναλλάσσεται μεταξύ περιβάλλοντος και κλειστού συστήματος, εξαιτίας της μεταβολής του όγκου αυτού.



Στο διπλανό σκαρίφημα, το αέριο που περιέχεται στον κύλινδρο αποτελεί κλειστό σύστημα, μιας και δεν υπάρχει κάποια συναλλαγή μάζας.

Το αέριο βρίσκεται υπό πίεση  $p$ , η οποία μεταφέρεται στο έμβολο επιφάνειας  $A$ , ενώ έξω από τον κύλινδρο θεωρείται ότι υπάρχει κενό. Η πίεση του αερίου ωθεί το έμβολο, μεταβάλλοντας έτσι τον όγκο του κλειστού συστήματος. Για την απειροστή μετατόπιση του εμβόλου, ο κλασικός ορισμός του έργου δίνει:

$$dW = F \cdot dx = (A \cdot p) \cdot dx = p \cdot (A \cdot dx) = p \cdot dV \tag{1.5}$$

υπό τις ακόλουθες παραδοχές:

- η κίνηση του εμβόλου λαμβάνει χώρα χωρίς τριβές
- η μετατόπιση του εμβόλου είναι χαμηλής ταχύτητας, ώστε ανά πάσα στιγμή να αποκαθίσταται ισορροπία εντός του κυλίνδρου (χωρίς στροβιλισμούς, ανομοιοκατανομή θερμοκρασίας κ.λπ.)
- η εξάπλωση της μεταβολής της πίεσης γίνεται ακαριαία.

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (1.5) για την κίνηση του εμβόλου μεταξύ των θέσεων «1» και «2», λαμβάνεται το **έργο ογκομεταβολής**, ίσο προς:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 p dV \Leftrightarrow w_{1 \rightarrow 2} = \frac{W_{1 \rightarrow 2}}{m} = \int_1^2 p dv \tag{1.6}$$

Το έργο ογκομεταβολής, όπως φαίνεται παραπάνω, είναι εκτατικό μέγεθος, μπορεί να αναχθεί στη μονάδα μάζας του συστήματος και έχει, κατά τα γνωστά, διαστάσεις ενέργειας.

### 1.5. ΤΕΧΝΙΚΟ ΕΡΓΟ

Σε αντίθεση με το έργο ογκομεταβολής, το οποίο έχει έννοια κατά την εκτόνωση αερίου εντός κυλίνδρου χωρίς μεταβολή μάζας, το **τεχνικό έργο** είναι αυτό που παράγεται από την εκτόνωση αερίου σε ανοιχτό σύστημα (π.χ. σε στρόβιλο) συνεχούς λειτουργίας. Το τεχνικό έργο ορίζεται από την απλή σχέση:

$$W_{t_{1 \rightarrow 2}} = - \int_1^2 V dp \Leftrightarrow w_{t_{1 \rightarrow 2}} = \frac{W_{t_{1 \rightarrow 2}}}{m} = - \int_1^2 v dp \tag{1.7}$$



Το τεχνικό έργο, ως μορφή του μηχανικού έργου, έχει μονάδες ενέργειας και είναι εκτατικό μέγεθος, όπως φαίνεται και στην παραπάνω σχέση.

## 1.6. ΠΡΩΤΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Η ισχύς του δεν αποδεικνύεται, όμως κανένα πείραμα δεν το έχει ως τώρα καταρρίψει. Διατυπώνεται, δε, με δύο τρόπους για ανοιχτά και για κλειστά συστήματα.

### 1.6.1. Διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για Κλειστά Συστήματα

Έχοντας υπ' όψιν τα μεγέθη της θερμότητας, του έργου ογκομεταβολής και της μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας κατά μήκος μιας θερμοδυναμικής μεταβολής, το 1<sup>ο</sup> θερμοδυναμικό αξίωμα συσχετίζει τα παραπάνω μεγέθη με την ακόλουθη απλή σχέση:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} \quad (1.8)$$

για δε απειροστές μεταβολές, το αξίωμα γράφεται:

$$dQ = dU + dW \Leftrightarrow dq = du + dw \quad (1.9)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην παραπάνω εξίσωση, η θερμότητα και το έργο, σε αντίθεση με την εσωτερική ενέργεια, δεν είναι τέλεια διαφορικά, ώστε η μεταβολή αυτών να εξαρτάται και από το δρόμο της θερμοδυναμικής μεταβολής.

### 1.6.2. Διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για Ανοιχτά Συστήματα

Διαφορίζοντας την εξίσωση του ορισμού της ενθαλπίας, λαμβάνεται:

$$H = U + p \cdot V \Leftrightarrow dH = dU + pdV + Vdp \Leftrightarrow dh = du + pdv + vdp \quad (1.10)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (1.9) και (1.10) δίνει τη διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος σε ανοιχτά συστήματα:

$$\left. \begin{array}{l} dq = du + dw \\ dh = du + pdv + vdp \end{array} \right\} dq = (dh - pdv - vdp) + pdv = dh - vdp = dh + dw_t \quad (1.11)$$

Στην ειδική περίπτωση αδιαβατικών συστημάτων (π.χ. σε αμμοστροβίλους), η εξίσωση 1.11 δίνει:

$$dq = dh + dw_t \xrightarrow{dq=0} dh = -dw_t \Rightarrow w_{t_{1 \rightarrow 2}} = h_1 - h_2 \quad (1.12)$$

Σε επόμενη παράγραφο θα φανεί στην πράξη η χρησιμότητα της παραπάνω σχέσης, η οποία, με γνώση (από πίνακες) των ενθαλπιών του ατμού πριν και μετά την αδιαβατική του εκτόνωση στον ατμοστρόβιλο, θα μπορεί να δώσει το τεχνικό έργο που παράγεται στον ατμοστρόβιλο.

Πρέπει να τονιστεί ότι οι δύο εκφράσεις του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος είναι απόλυτα ισοδύναμες και κατά τους υπολογισμούς επιλέγονται ανάλογα με τις συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

### 1.7. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ PVT - ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΡΜΟΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ

Εκ πείρας είναι γνωστό ότι κάθε ιστροπικό σύστημα σταθερής σύνθεσης, μη υποκείμενο στην επίδραση διαφόρων πεδίων, χημικών αντιδράσεων, ακτινοβολιών (καλούμενο ως σύστημα pVT), ευρισκόμενο σε ισορροπία μπορεί να περιγραφεί πλήρως με γνώση δύο από τα μεγέθη πίεσης, όγκου και θερμοκρασίας. Για δεδομένες τιμές των δύο μεταβλητών του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας, η τρίτη ορίζεται μοναδικά. Επειδή, δε, τα μεγέθη αυτά είναι καταστατικά, τα αντίστοιχα διαφορικά είναι τέλεια, όπως περιγράφεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{cases} p = p(V, T) \Rightarrow dp = \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_T dV + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V dT \\ V = V(p, T) \Rightarrow dV = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T dp + \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p dT \\ T = T(p, V) \Rightarrow dT = \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_V dp + \left. \frac{\partial T}{\partial V} \right|_p dV \end{cases} \quad (1.13)$$

Έστω ένα σύστημα που υφίσταται θερμοδυναμική μεταβολή από την κατάσταση «1» στην κατάσταση «2», η οποία συνοδεύεται από συναλλαγή θερμότητας  $q_{1 \rightarrow 2}$  και αλλαγή της θερμοκρασίας από την τιμή  $T_1$  στην τιμή  $T_2$ . Αν η μεταβολή πραγματοποιείται υπό σταθερή πίεση (δηλαδή, είναι **ισόθλιπτη**), τότε είναι δυνατό να οριστεί η μέση ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση, ως:

$$\bar{c}_p = \left. \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{T_2 - T_1} \right|_p \quad (1.14)$$

ενώ για απειροστή μεταβολή της θερμοκρασίας λαμβάνεται η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερή πίεση:

$$c_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_p \quad (1.15)$$

Η διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για ανοιχτά συστήματα (όπου, λόγω της ισόθλιπτης μεταβολής, ο όρος του τεχνικού έργου μηδενίζεται) μετασχηματίζει τη σχέση (1.15) στην ισοδύναμη:

$$c_p = \left. \frac{dh}{dT} \right|_p \quad (1.16)$$

Αν η θερμοδυναμική μεταβολή που περιγράφεται εκτελείται υπό σταθερό όγκο (σε αυτή την περίπτωση, η μεταβολή ονομάζεται **ισόογκη**), τότε απολύτως ανάλογα με παραπάνω θα οριζόταν η ειδική θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο, ως

$$c_v = \left. \frac{dq}{dT} \right|_v \quad (1.17)$$

και με τη βοήθεια της διατύπωσης του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος (ώστε, δεδομένου του σταθερού όγκου, να μηδενιστεί ο όρος του έργου ογκομεταβολής) λαμβάνεται:

$$c_v = \left. \frac{du}{dT} \right|_v \quad (1.18)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι αμφότερες οι ειδικές θερμοχωρητικότητες που περιγράφηκαν παραπάνω αποτελούν παράγωγα των αντίστοιχων εκτακικών θερμοχωρητικοτήτων. Είναι, επίσης, εφικτή η ολοκλήρωση των εξισώσεων (1.15) και (1.17), ώστε, με γνώση των θερμοχωρητικοτήτων, να υπολογιστούν τα αντίστοιχα ποσά θερμότητας:

$$\begin{cases} q_{1 \rightarrow 2, p} = \int_1^2 c_p dT = h_2 - h_1 \\ q_{1 \rightarrow 2, v} = \int_1^2 c_v dT = \Delta u_{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (1.19)$$

## 1.8. ΤΕΛΕΙΟ ΑΕΡΙΟ – ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΕΛΕΙΟΥ ΑΕΡΙΟΥ

Το **τέλειο αέριο** αποτελεί μια απλούστευση των πολύπλοκων νόμων που απαιτούνται για να περιγράψουν τα πραγματικά αέρια. Οι απλές εξισώσεις στις οποίες υπακούει το τέλειο αέριο καθιστούν εύκολους τους υπολογισμούς των ιδιοτήτων και των μεταβολών του και το κάνουν ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη της Θερμοδυναμικής. Πρέπει να τονιστεί ότι κανένα πραγματικό αέριο δεν έχει τις ιδιότητες του τελείου, όμως μπορεί να ποσοτικοποιηθεί η απόκλιση της συμπεριφοράς ενός πραγματικού αερίου από αυτήν του τελείου, η οποία εξαρτάται από το είδος του αερίου, αλλά και από την κατάσταση του. Πρέπει να σημειωθεί ότι όσο ένα αέριο προσεγγίζει το σημείο συμπύκνωσής του, τόσο η συμπεριφορά του αποκλίνει από εκείνη του τελείου αερίου.

Η απλή σχέση που συνδέει την πίεση, τον ειδικό όγκο και τη θερμοκρασία του τελείου αερίου ονομάζεται **καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου**, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

$$p \cdot v = R \cdot T \quad (1.20)$$

όπου  $R$  είναι η σταθερά, η οποία σχετίζεται με το μοριακό βάρος του αερίου:

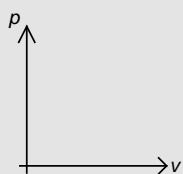
$$R = \frac{8.314 \frac{kJ}{kmol \cdot K}}{(MB)} \quad (1.21)$$

Μπορεί να αποδειχτεί ότι στο τέλειο αέριο, τόσο η ενθαλπία όσο και η εσωτερική ενέργεια είναι συναρτήσεις **μόνο της θερμοκρασίας** (η οποία μετρίεται πάντα σε **Kelvin και ποτέ σε βαθμούς Κελσίου**), κάτι που δεν ισχύει στα πραγματικά αέρια. Παράλληλα, οι ειδικές θερμοχωρητικότητες υπό σταθερή πίεση και υπό σταθερό όγκο μπορούν **να θεωρηθούν** σταθερές και μη εξαρτώμενες από άλλες παραμέτρους, σχετίζονται δε με τη σταθερά των αερίων μέσω της πολύ χρήσιμης σχέσης:

$$c_p - c_v = R \quad (1.22)$$

### 1.9. ΒΑΣΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΕΛΕΙΟΥ ΑΕΡΙΟΥ

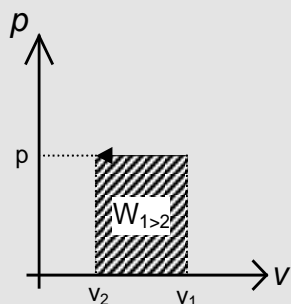
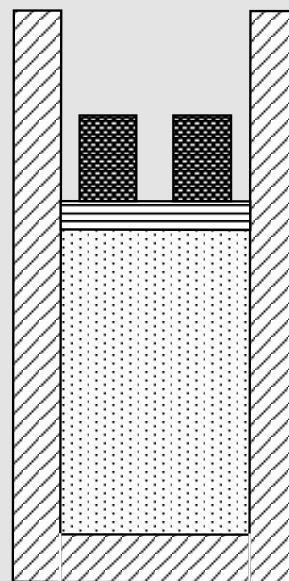
Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται οι κύριες θερμοδυναμικές μεταβολές, στις οποίες μπορεί να υποβληθεί ένα σύστημα, υπό το πρίσμα της προσέγγισης του τελείου αερίου. Η γνώση τους καθιστά ευχερή τον υπολογισμό των θερμοδυναμικών παραμέτρων του αερίου σε κάθε περίπτωση.



Πριν τη μελέτη των μεταβολών, είναι χρήσιμο να εισαχθεί η έννοια του διαγράμματος πίεσης – ειδικού όγκου, άλλως  $p-v$ . Ένα τέτοιο διάγραμμα παριστάνεται στο διπλανό σκαρίφημα. Η αύξηση των όγκων σημειώνεται με κίνηση προς τα δεξιά, η αύξηση των πιέσεων με κίνηση προς τα πάνω και η αύξηση των θερμοκρασιών με κίνηση προς τα πάνω και δεξιά.

#### 1.9.1. Ισόθλιπτες Μεταβολές Τελείου Αερίου

Κατά τις ισόθλιπτες μεταβολές, η **πίεση παραμένει σταθερή** καθ' όλη τη διάρκεια της μεταβολής. Ένα κλειστό ισόθλιπτο σύστημα θα μπορούσε να θεωρηθεί όπως στο διπλανό σκαρίφημα, όπου εντός του μη μονωμένου κυλίνδρου εμπεριέχεται ποσότητα τελείου αερίου. Επάνω στο έμβολο είναι τοποθετημένες σταθερές μάζες, ώστε η πίεση που ασκεί το έμβολο στο αέριο λόγω του βάρους των μαζών να είναι σταθερή. Το έμβολο μπορεί να κινείται προς τα πάνω ή προς τα κάτω, όμως είναι σαφές ότι η πίεσή του θα είναι πάντα σταθερή. Η παράσταση της ισόθλιπτης μεταβολής απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα  $p-v$  φαίνεται, δε, ότι η μεταβολή κινείται προς τα αριστερά, άρα πρόκειται για ισόθλιπτη συμπίεση (μείωση του ειδικού όγκου), ενώ η γραμμοσκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί στο



παραγόμενο έργο ογκομεταβολής (ως ολοκλήρωμα της πίεσης επί του όγκου). Βάσει της καταστατικής εξίσωσης του τελείου αερίου, η αναλογία όγκων και θερμοκρασιών δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.23)$$

Στα κλειστά συστήματα, το έργο ογκομεταβολής είναι εξ' ορισμού ίσο προς  $w_{1 \rightarrow 2, p} = p \cdot (v_2 - v_1)$ , κατά συνέπεια το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα γράφεται:

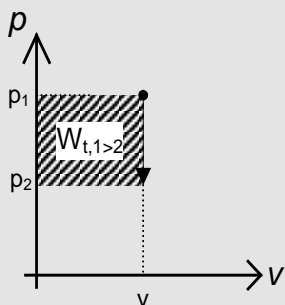
$$dq = du + dw \Leftrightarrow q_{1 \rightarrow 2} = (u_2 - u_1) + p(v_2 - v_1) = h_2 - h_1 \xrightarrow{T.A.} q_{1 \rightarrow 2} = c_p \cdot (T_2 - T_1) \quad (1.24)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι στο ακριβώς ίδιο συμπέρασμα καταλήγει και η διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για ανοιχτά συστήματα, όπου ο μηδενισμός του όρου του τεχνικού έργου (μιας και στην ισόθλιπτη μεταβολή είναι  $dp = 0$ ), οδηγεί στη εξίσωση της συναλλασσόμενης θερμότητας με τη διαφορά ενθαλπιών μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης.

### 1.9.2. Ισόογκες Μεταβολές Τελείου Αερίου

Κατά τη διενέργεια μιας ισόογκης μεταβολής, παραμένει σταθερός ο **όγκος** του συστήματος· μια τέτοια μεταβολή θα μπορούσε εύκολα να προσομοιωθεί από έναν κύλινδρο με σταθερά τοιχώματα. Η καταστατική εξίσωση του τελείου αερίου δίνει τη σχέση μεταξύ πιέσεων και θερμοκρασιών σε μια ισόογκη μεταβολή ως ακολούθως:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (1.25)$$



η δε μεταβολή απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα  $p-v$ , η γραμμοσκιασμένη περιοχή του οποίου αντιστοιχεί στο τεχνικό έργο της μεταβολής.

Για κλειστά συστήματα, ο όρος του έργου ογκομεταβολής στο 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα μηδενίζεται (μιας και τώρα είναι  $dv = 0$ ), ώστε να ισχύει η σχέση:

$$dq = du \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2, v} = u_2 - u_1 \quad (1.26)$$

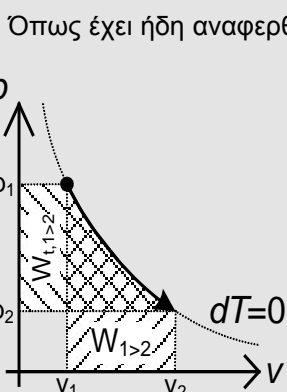
Σε ανοιχτά συστήματα, η αντίστοιχη διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος δίνει

$$dq = dh + dw_t \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2} = (h_2 - h_1) - v \cdot (p_2 - p_1) = u_2 - u_1 \xrightarrow{T.A.} q_{1 \rightarrow 2} = c_v \cdot (T_2 - T_1) \quad (1.27)$$

Συμπερασματικά, λοιπόν, η ενέργεια που συναλλάσσεται μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος είναι ίση προς τη διαφορά:

- ενθαλπιών, σε ισόθλιπτες μεταβολές
- εσωτερικών ενεργειών, σε ισόογκες μεταβολές.

### 1.9.3. Ισοθερμοκρασιακές Μεταβολές Τελείου Αερίου



Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στο τέλειο αέριο η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια είναι συναρτήσεις της θερμοκρασίας μόνο, με αποτέλεσμα σε κάθε ισοθερμοκρασιακή μεταβολή (δηλαδή, μεταβολή με σταθερή **θερμοκρασία**), οι όροι ενθαλπίας και εσωτερικής ενέργειας στις αντίστοιχες διατυπώσεις του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος μηδενίζονται. Στο διάγραμμα  $p-v$  οι ισοθερμοκρασιακές καμπύλες αντιστοιχούν σε ισοσκελείς υπερβολές και ανάλογα με τη φορά των υπερβολών μπορεί να απεικονίζον

εκτονώσεις (προς τα δεξιά, όπως στο διπλανό διάγραμμα) ή συμπιέσεις (προς τα αριστερά). Μέσω της καταστατικής, δε, εξίσωσης είναι εύκολο να συσχετιστούν η πίεση και ο ειδικός όγκος κατά μήκος μιας ισοθερμοκρασιακής μεταβολής:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad (1.28)$$

Σε κλειστά συστήματα, η διατύπωση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος εξισώνει το έργο ογκομεταβολής με τη συναλασσόμενη θερμότητα:

$$\begin{aligned} dq = dw \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2} = w_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 p dv \xrightarrow{p \cdot v = R \cdot T} w_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{R \cdot T}{v} dv \\ \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2} = w_{1 \rightarrow 2} &= RT \int_1^2 \frac{dv}{v} = RT \ln \left( \frac{v_2}{v_1} \right) \xrightarrow{(1.28)} q_{1 \rightarrow 2} = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

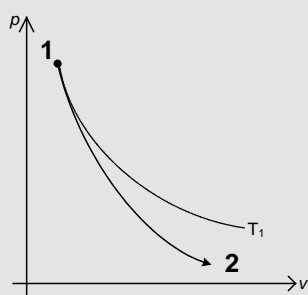
Κατά παρόμοιο τρόπο, σε ανοιχτά συστήματα η συναλασσόμενη θερμότητα εξισώνεται με το τεχνικό έργο:

$$\begin{aligned} dq = dw_t \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2} = w_{t,1 \rightarrow 2} &= - \int_1^2 v dp \xrightarrow{p \cdot v = R \cdot T} q_{1 \rightarrow 2} = w_{t,1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 \frac{R \cdot T}{p} dp \\ \Rightarrow q_{1 \rightarrow 2} = w_{t,1 \rightarrow 2} &= -RT \int_1^2 \frac{dp}{p} = -RT \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Από τις σχέσεις (1.29) και (1.30) διαπιστώνεται ότι όταν:

- $p_1 < p_2$  (συμπύεση) ο λογάριθμος είναι αρνητικός, επομένως το σύστημα (όπως αναμενόταν) απορροφά μηχανικό έργο και αποδίδει θερμότητα στο περιβάλλον
- $p_1 > p_2$  (εκτόνωση) ο λογάριθμος είναι θετικός, επομένως το σύστημα παράγει μηχανικό έργο απορροφώντας θερμότητα στο περιβάλλον

#### 1.9.4. Αδιαβατικές Μεταβολές Τελείου Αερίου



Κατά την αδιαβατική μεταβολή δε λαμβάνει χώρα συναλλαγή θερμότητας μεταξύ συστήματος και περιβάλλοντος, οπότε στις διατυπώσεις του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος μηδενίζονται οι όροι της θερμότητας. Μια ποιοτική απεικόνιση αδιαβατικής εκτόνωσης, αλλά και η σχετική της θέση ως προς την ισοθερμοκρασιακή καμπύλη της αρχικής κατάστασης, απεικονίζεται στο διπλανό διάγραμμα.

Αποδεικνύεται ότι μεταξύ των δύο τελικών καταστάσεων μιας αδιαβατικής μεταβολής ισχύει η σχέση:

$$p_1 \cdot v_1^k = p_2 \cdot v_2^k \quad (1.31)$$

όπου  $k$  είναι ο **αδιαβατικός εκθέτης**, ο οποίος εξαρτάται από τη φύση του αερίου και είναι ίσος προς το πηλίκο των ειδικών θερμοχωρητικοτήτων, δηλαδή:

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (1.32)$$

Ο συνδυασμός της εξίσωσης (1.31) και της καταστατικής εξίσωσης του τελείου αερίου δίνει τις παρακάτω χρήσιμες σχέσεις:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (1.33)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1} \quad (1.34)$$

Η γνώση των αρχικών και των τελικών θερμοκρασιών είναι καίρια για τον υπολογισμό του συναλλασσόμενου μηχανικού έργου, όπως φαίνεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$du + dw = 0 \Rightarrow dw = -du \Rightarrow w_{1 \rightarrow 2} = u_1 - u_2 \xrightarrow{T.A.} w_{1 \rightarrow 2} = c_v \cdot (T_1 - T_2) \quad (1.35)$$

$$dh + dw_t = 0 \Rightarrow dw_t = -dh \Rightarrow w_{t,1 \rightarrow 2} = h_1 - h_2 \xrightarrow{T.A.} w_{t,1 \rightarrow 2} = c_p \cdot (T_1 - T_2) \quad (1.36)$$

Τονίζεται ότι οι τελευταίες προσεγγίσεις ισχύουν **μόνο** στην περίπτωση του τελείου αερίου, όπως σημειώνεται. Για πραγματικά αέρια, όπως θα εξεταστεί σε επόμενο εδάφιο, ισχύουν μόνο οι ορισμοί και τα αξιώματα.

### 1.9.5. Κυκλικές Μεταβολές

Ας θεωρηθεί ένα σύστημα το οποίο ξεκινά από μια αρχική κατάσταση, διέρχεται από διακριτές καταστάσεις ισορροπίας και καταλήγει στην αρχική κατάσταση. Το σύνολο των διακριτών καταστάσεων ονομάζεται **θερμοδυναμικός κύκλος** ή απλά **κύκλος**, η δε μεταβολή ονομάζεται **κυκλική μεταβολή**. Σε κάθε κυκλική μεταβολή C, το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα γράφεται:

$$\oint_C dq = \begin{cases} \oint_C du + \oint_C dw \\ \oint_C dh + \oint_C dw_t \end{cases} \quad (1.37)$$

Είναι προφανές ότι, εφ' όσον ο κύκλος καταλήγει στην αρχική κατάσταση, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας και της ενθαλπίας κατά μήκος αυτού θα είναι μηδενικές, ώστε τελικά να απομένει:

$$\oint_C dq = \begin{cases} \oint_C dw \\ \oint_C dw_t \end{cases} \quad (1.38)$$

Το συμπέρασμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη μελέτη των θερμοδυναμικών κύκλων, εξισώνοντας την ολική θερμότητα που προσδίδεται ή αποδίδεται με το ολικό μηχανικό έργο που παράγεται ή καταναλώνεται. Τονίζεται, δε, ότι όταν η κυκλική μεταβολή είναι **δεξιόστροφη**, τότε ο θερμοδυναμικός κύκλος περιγράφει μια **θερμική μηχανή** (κατανάλωση θερμότητας για παραγωγή

έργου)· αντίθετα, όταν η μεταβολή είναι **αριστερόστροφη**, τότε ο κύκλος περιγράφει μια **ψυκτική μηχανή** (κατανάλωση έργου για παραγωγή ψύξης).

**Παράδειγμα**

Ατμοσφαιρικός αέρας, ο οποίος συμπεριφέρεται σαν τέλειο αέριο, υφίσταται τις ακόλουθες μεταβολές:

- 1 → 2: ισόθλιπτη θέρμανση
- 2 → 3: ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση
- 3 → 4: ισόογκη ψύξη
- 4 → 1: αδιαβατική συμπίεση.

**Θεωρούνται γνωστές οι παρακάτω συνθήκες:**  $p_1 = 20\text{bar}$ ,  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ ,  $q_{1\rightarrow 2} = 546 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}$ ,

$v_3 = 2 \cdot v_2$ ,  $p_4 = 1\text{bar}$ , **καθώς επίσης και το μοριακό βάρος του αέρα**  $MB = 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$  **και ο**

**αδιαβατικός του εκθέτης**  $k = 1.4$  **Ζητούνται:**

1. η σταθερά R του αέρα κι οι ειδικές θερμοχωρητικότητες  $c_p$  και  $c_v$ .
2. τα καταστατικά μεγέθη  $p, v, T$  στα χαρακτηριστικά σημεία της κυκλικής μεταβολής και η κατασκευή θερμοδυναμικού διαγράμματος  $p-v$ .
3. τα συναλλασσόμενα έργα ογκομεταβολής, τεχνικά έργα, ποσά θερμότητας για τις τέσσερις μεταβολές, καθώς επίσης και οι μεταβολές εσωτερικής ενέργειας και ενθαλπίας.
4. ο βαθμός απόδοσης του κύκλου

**Λύση**

**(Για το ερώτημα 1):**

Η σταθερά του αέρα υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση (1.21), ως:

$$R = \frac{8,314 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}}{29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

ενώ οι ειδικές θερμοχωρητικότητες προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} c_p - c_v = R \\ \frac{c_p}{c_v} = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_p = \frac{k}{k-1} \cdot R \\ c_v = \frac{R}{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_p = \frac{1.4}{0.4} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \\ c_v = \frac{1}{0.4} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \end{cases}$$

**(Για το ερώτημα 2)**

(Κατάσταση «1») Για την κατάσταση «1» είναι γνωστές η πίεση και η θερμοκρασία, άρα μέσω της καταστατικής εξίσωσης προκύπτει εύκολα ο ειδικός όγκος:

$$v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1} = \frac{287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 300\text{K}}{20 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,043 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$



(Κατάσταση «2») Μόνο η πίεση της κατάστασης «2» είναι γνωστή (ίση με αυτήν της κατάστασης «1», μιας και η μεταβολή 1→2 είναι ισόθλιπτη). Επίσης, είναι γνωστή η συναλλασσόμενη θερμότητα κατά τη μεταβολή αυτή, άρα από τη σχέση (1.24) μπορεί να υπολογιστεί η θερμοκρασία της κατάστασης «2», ως:

$$q_{1 \rightarrow 2} = c_p \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 = \frac{q_{1 \rightarrow 2}}{c_p} + T_1 = \frac{546 \frac{kJ}{kg}}{1.005 \frac{kJ}{kg \cdot K}} + 300K = 843.2K$$

ενώ από τη σχέση (1.23) εξάγεται αμέσως ο ειδικός όγκος της κατάστασης «2»:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow v_2 = \frac{T_2}{T_1} \cdot v_1 = \frac{843.2K}{300K} \cdot 0.043 \frac{m^3}{kg} = 0.121 \frac{m^3}{kg}$$

(Κατάσταση «3») Εδώ είναι γνωστή η θερμοκρασία (ίση με αυτήν της κατάστασης «2», αφού η μεταβολή 2→3 είναι ισοθερμοκρασιακή) και ο ειδικός όγκος (διπλάσιος από αυτόν στην κατάσταση «2», ώστε με εφαρμογή της σχέσης (1.28) να μπορεί αμέσως να υπολογιστεί η πίεση:

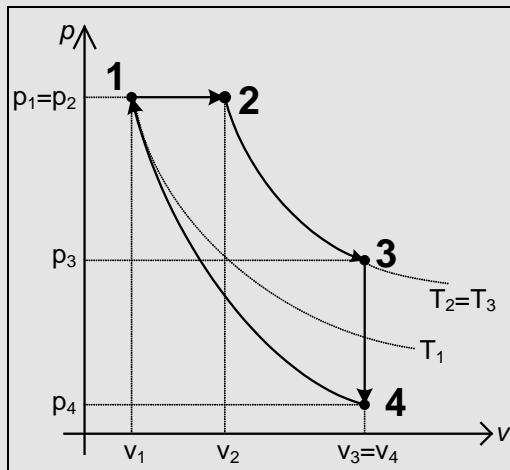
$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{v_3}{v_2} \Rightarrow p_3 = \frac{v_2}{v_3} \cdot p_2 = \frac{v_2}{2 \cdot v_2} \cdot p_2 = \frac{1}{2} \cdot 20bar = 10bar$$

(Κατάσταση «4») Η κατάσταση αυτή είναι κατάληξη ισόογκης μεταβολής, άρα, δεδομένης και της πίεσης, μπορεί μέσω της καταστατικής εξίσωσης να υπολογιστεί η θερμοκρασία:

$$T_4 = \frac{p_4 \cdot v_4}{R} = \frac{10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 0.242 \frac{m^3}{kg}}{287 \frac{N \cdot m}{kg \cdot K}} = 84.3K$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται τα θερμοδυναμικά μεγέθη των τεσσάρων καταστάσεων και ακολουθεί μια ποιοτική απεικόνιση σε διάγραμμα p-v.

	1	2	3	4
<b>p [bar]</b>	20	20	10	1
<b>v [m<sup>3</sup>/kg]</b>	0.043	0.121	0.242	0.242
<b>T [K]</b>	300	843.2	843.2	84.2



(Για το ερώτημα 3)

(Μεταβολή 1→2) Είναι ήδη γνωστή η συναλλασσόμενη θερμότητα της μεταβολής και ότι το τεχνικό της έργο είναι εξ' ορισμού μηδενικό. Το έργο ογκομεταβολής της υπολογίζεται από τον ορισμό:

$$w_{1 \rightarrow 2, p} = p \cdot (v_2 - v_1) = 20 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (0.121 - 0.043) \frac{m^3}{kg} = 156 \frac{kJ}{kg}$$

ενώ η έκφραση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος για κλειστά συστήματα δίνει τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας:

$$dq = du + dw \Leftrightarrow q_{1 \rightarrow 2} = \Delta u_{1 \rightarrow 2} + w_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow \Delta u_{1 \rightarrow 2} = q_{1 \rightarrow 2} - w_{1 \rightarrow 2} = (546 - 156) \frac{kJ}{kg} = 390 \frac{kJ}{kg}$$

Σημειώνεται ότι στο ίδιο αποτέλεσμα οδηγεί και η σχέση:

$$\Delta u_{1 \rightarrow 2} = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 0.718 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot (843.2 - 300) K = 390 \frac{kJ}{kg}$$

(Μεταβολή 2→3) Κατά μήκος αυτής της ισοθερμοκρασιακής μεταβολής δε μεταβάλλονται η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια, τα δε υπόλοιπα μεγέθη υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.29) και (1.30):

$$q_{2 \rightarrow 3} = w_{2 \rightarrow 3} = w_{t, 2 \rightarrow 3} = 0.287 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot 843.2 K \cdot \ln\left(\frac{20 \text{ bar}}{10 \text{ bar}}\right) = 168 \frac{kJ}{kg}$$

(Μεταβολή 3→4) Εδώ εφαρμόζονται οι εξισώσεις της ισόογκης μεταβολής. Εξ' ορισμού δεν εμφανίζεται συναλλαγή έργου ογκομεταβολής, εφαρμόζονται δε οι σχέσεις:

$$q_{3 \rightarrow 4} = \Delta u_{3 \rightarrow 4} = c_v \cdot (T_4 - T_3) = 0.718 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot (84.3 - 843.2) K = -545 \frac{kJ}{kg}$$

$$w_{t, 3 \rightarrow 4} = -v_3 \cdot (p_4 - p_3) = -0.242 \frac{m^3}{kg} \cdot (1 - 10) \cdot 10^2 \frac{kN}{m^2} = 218 \frac{kJ}{kg}$$

$$\Delta h_{3 \rightarrow 4} = c_p \cdot (T_4 - T_3) = 1.005 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot (84.3 - 843.2) K = -763 \frac{kJ}{kg}$$

(Μεταβολή 4→1) Στην αδιαβατική μεταβολή δεν υπάρχει καμία συναλλαγή θερμότητας, άρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$w_{t,4 \rightarrow 1} = -\Delta h_{4 \rightarrow 1} = -c_p \cdot (T_1 - T_4) = -1.005 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot (300 - 84.3) K = -217 \frac{kJ}{kg}$$

$$w_{4 \rightarrow 1} = -\Delta u_{4 \rightarrow 1} = -c_v \cdot (T_1 - T_4) = -0.718 \frac{kJ}{kg \cdot K} \cdot (300 - 84.3) K = -155 \frac{kJ}{kg}$$

Στον παρακάτω εποπτικό πίνακα συνοψίζονται όλες οι μεταβολές και ελέγχεται το αν επαληθεύεται το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα.

Μεταβολή	Είδος μεταβολής	q	Δu	Δh	w	w <sub>t</sub>
		[kJ/kg]				
1 → 2	dp = 0	546	390	546	156	0
2 → 3	dT = 0	168	0	0	168	168
3 → 4	dv = 0	-545	-545	-763	0	218
4 → 1	dq = 0	0	155	217	-155	-217
<b>Σύνολο</b>		169	0	0	169	169

Ο μηδενισμός των αθροισμάτων των μεταβολών ενθαλπίας και εσωτερικής ενέργειας και η ισότητα μεταξύ συναλλασσόμενων ποσών θερμότητας και μηχανικών έργων επαληθεύουν την παραπάνω διαδικασία υπολογισμών.

(Για το ερώτημα 4)

Ο βαθμός απόδοσης του θερμοδυναμικού κύκλου που αναλύθηκε παραπάνω υπολογίζεται ως το πηλίκο του καθαρού έργου που παράγεται προς τη θερμότητα που προσδίδεται:

$$\eta_c = \frac{169 \frac{kJ}{kg}}{714 \frac{kJ}{kg}} = 23.67\%$$

### 1.10. ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΞΙΩΜΑ

Το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα αποτελεί, όπως προαναφέρθηκε, την ποσοτικοποίηση της διατήρησης της ενέργειας. Δε μπορεί, όμως, να δώσει καμιά πληροφορία για τη φορά πραγματοποίησης των διεργασιών.

Ας θεωρηθεί μια ελαστική σφαίρα, η οποία αφήνεται να πέσει από δεδομένο ύψος. Αν η σφαίρα ήταν ιδανική, τότε θα έπρεπε μετά από κάθε κρούση της στο έδαφος να επανέρχεται στο ύψος αυτό και η διαδικασία αυτή να επαναλαμβάνεται συνεχώς. Στην πράξη, όμως, κάθε πρόσπτωσή της στο έδαφος συνοδεύεται από απώλειες ενέργειας, οι οποίες θα προκαλέσουν μείωση του ύψους επαναφοράς· οι διαδοχικές απώλειες τελικώς θα ακινητοποιήσουν τη σφαίρα.

Το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα συνδέει τη θερμότητα που χάνεται με την αρχική δυναμική ενέργεια της σφαίρας. Αν, σε ένα υποθετικό σενάριο, αυτή η θερμότητα μπορούσε να προκαλέσει την ανύψωση

της σφαίρας, το 1<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα δε θα έθετε κανέναν περιορισμό. Εκ πείρας, όμως, γνωρίζουμε ότι ένα τέτοιο φαινόμενο είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί· αντίθετα, **μόνο με πρόσδοση έργου** είναι δυνατό να ανυψωθεί η σφαίρα.

Εδώ ακριβώς έρχεται το **Δεύτερο Θερμοδυναμικό Αξίωμα**, για να θέσει περιορισμούς στη φορά εκτέλεσης των φαινομένων. Οι δύο κυριότερες διατυπώσεις του είναι:

- «η θερμότητα δε μπορεί αφ' εαυτής να κινηθεί από ένα ψυχρότερο σώμα προς ένα θερμότερο». Η διατύπωση αυτή (γνωστή ως **διατύπωση Clausius**) ουσιαστικά απαγορεύει, κατά την αλληλεπίδραση ενός θερμού κι ενός ψυχρού σώματος, το θερμό να γίνει θερμότερο και το ψυχρό ψυχρότερο. Η φύση ορίζει ότι η θερμότητα θα μεταφερθεί από το θερμό στο ψυχρό.
- «είναι αδύνατη η κατασκευή μηχανής που λειτουργεί περιοδικά, ώστε να ανυψώνει μια μάζα, να ψύχει ένα θερμοδοχείο και να μην επιφέρει άλλη αλλαγή στο περιβάλλον». Με τη διατύπωση αυτή (τη λεγόμενη **διατύπωση Kelvin – Planck**) επιβάλλεται η ύπαρξη δύο διαφορετικών θερμοκρασιακών σταθμών, ανάμεσα στις οποίες θα πρέπει να λειτουργεί μια εργοπαραγωγός μηχανή, ενώ απαγορεύει την εξ' ολοκλήρου μετατροπή της θερμότητας σε μηχανικό έργο (αν και το αντίστροφο είναι, προδήλως, εφικτό). Αν δεν ετίθετο ο περιορισμός του 2<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος, θα ήταν δυνατή η εκμετάλλευση της εσωτερικής ενέργειας του ατμοσφαιρικού αέρα ή της θάλασσας για την παραγωγή έργου· όμως αυτά δε μπορούν παρά να αποτελέσουν τη μια θερμοκρασιακή στάθμη (και, συγκεκριμένα, τη χαμηλή)· η υψηλή στάθμη θα πρέπει να δημιουργηθεί με την πρόσδοση θερμότητας από άλλη πηγή (π.χ. από την καύση κάποιου ορυκτού καυσίμου).

Πριν τον ορισμό μεγεθών βάσει του 2<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος, θα πρέπει να περιγραφεί η σημαντική έννοια της **αντιστρεπτότητας**. Μια θερμοδυναμική μεταβολή λέγεται **αντιστρεπτή**, όταν είναι δυνατό να αντιστραφεί η φορά της σε οποιαδήποτε φάση της, λόγω μιας απειροστής μεταβολής του περιβάλλοντος. Αν και στην πράξη οι εμφανιζόμενες τριβές εμποδίζουν την αντιστρεπτότητα των μεταβολών, εν τούτοις η γνώση των ιδιοτήτων των μεταβολών αυτών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη των θερμοδυναμικών συστημάτων.

### 1.10.1. Εντροπία

Η εντροπία είναι ένα εκτατικό καταστατικό μέγεθος, το οποίο ορίζεται ως το πηλίκο της συναλλασσόμενης θερμότητας προς την αντίστοιχη απόλυτη θερμοκρασία:

$$ds = \frac{dq}{T} \Leftrightarrow \Delta s_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \frac{dq}{T} \quad (1.39)$$

Αποτελεί ένα εξαιρετικής σημασίας μέγεθος, μιας και, εκτός από την υπολογιστική του αξία, περιγράφει ποσοτικά το βαθμό αντιστρεπτότητας των θερμοδυναμικών μεταβολών.

Βάσει του 2<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος, η σχέση (1.39) έχει πάντοτε τη μορφή:

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} \leq 0 \Leftrightarrow \sum_i \frac{q_i}{T_i} \leq 0 \quad (1.40)$$

όπου το «ίσον» αντιστοιχεί σε αντιστρεπτή μεταβολή. Στον παραπάνω αθροιστή, οι θερμότητες εκφράζονται αλγεβρικά (δηλαδή, με το πρόσημό τους). Ο συνδυασμός του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού

Αξιώματος και του ορισμού της εντροπίας δίνει ιδιαίτερα χρήσιμες σχέσεις για τη μεταβολή της εντροπίας σε συστήματα με εργαζόμενο μέσο κάποιο τέλει αέριο:

$$dq = du + dw \Rightarrow T \cdot ds = c_v \cdot dT + p \cdot dv$$

$$\Rightarrow ds = c_v \cdot \frac{dT}{T} + p \cdot \frac{dv}{T} = c_v \cdot \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dv}{v} \quad (1.41)$$

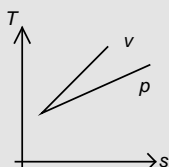
$$\Rightarrow \Delta s_{1 \rightarrow 2} = c_v \cdot \int_1^2 \frac{dT}{T} + R \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v} = c_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

$$dq = dh + dw_i \Rightarrow T \cdot ds = c_p \cdot dT - v \cdot dp$$

$$\Rightarrow ds = c_p \cdot \frac{dT}{T} - v \cdot \frac{dp}{T} = c_p \cdot \frac{dT}{T} - R \cdot \frac{dp}{p} \quad (1.42)$$

$$\Rightarrow \Delta s_{1 \rightarrow 2} = c_p \cdot \int_1^2 \frac{dT}{T} - R \cdot \int_1^2 \frac{dp}{p} = c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

### 1.10.2. Εντροπικά Διαγράμματα – Ιεντροπικός Βαθμός Απόδοσης



Από τον ορισμό της εντροπίας εξάγεται ένα άλλο χρήσιμο συμπέρασμα: ολοκληρώνοντας τη θερμοκρασία επί της εντροπίας, λαμβάνεται η θερμοκρασία. Η ολοκλήρωση αυτή σε γραφική μορφή θα μπορούσε να παραχθεί μόνο σε ένα **διάγραμμα θερμοκρασίας – εντροπίας**, άλλως διάγραμμα  $T$ - $s$ , όπως αυτό που φαίνεται δίπλα. Εδώ:

- οι ισοθερμοκρασιακές γραμμές είναι οριζόντιες ευθείες
- οι ισηντροπικές γραμμές είναι κατακόρυφες ευθείες
- οι ισόθλιπτες είναι καμπύλες, όπως φαίνεται στο διάγραμμα· κατά τη συμπίεση, γίνεται κίνηση προς τα πάνω δεξιά, ενώ κατά την εκτόνωση το αντίστροφο
- οι ισόογκες είναι καμπύλες με μεγαλύτερη κλίση από αυτή των ισόθλιπτων.
- το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από μια μεταβολή και τον οριζόντιο άξονα δίνει τη συναλλασσόμενη θερμότητα κατά τη μεταβολή· σε περίπτωση θέρμανσης, η μεταβολή κινείται προφανώς προς τα δεξιά.

Ένα άλλο εντροπικό διάγραμμα, ιδιαίτερα εύχρηστο, είναι το **διάγραμμα ενθαλπίας – εντροπίας**, γνωστό και ως **διάγραμμα Mollier**. Το διάγραμμα Mollier χρησιμοποιείται ευρέως για τη μελέτη των ιδιοτήτων του διαφασισμού μείγματος νερού και υδρατμού, μιας και οι διαφορές των ενθαλπιών δίνουν αμέσως το παραγόμενο τεχνικό έργο κατά την αδιαβατική αποτόνωση σε στρόβιλο ή ατμοστρόβιλο, κατευθείαν τις αδιαβατικές μεταβολές, παράλληλα με την αντίστοιχη ισηντροπική μεταβολή κ.λπ. Η χρήση του διαγράμματος αυτού θα περιγραφεί εκτενέστερα στην ενότητα της θεωρίας ατμών.

	<p>Τίθεται, όμως, το ερώτημα: πως μια αδιαβατική μεταβολή ταυτίζεται με μια ισηντροπική, όταν έχει σαφώς ειπωθεί ότι κάθε μη αντιστρεπτή θερμοδυναμική μεταβολή συνοδεύεται από μεταβολή της εντροπίας του συστήματος; Η απάντηση είναι πως όντως μια τέτοια ταύτιση είναι εξιδανικευμένη· το μέγεθος που ποσοτικοποιεί το πόσο μια αδιαβατική μεταβολή απέχει από μια ισηντροπική ονομάζεται <b>ισηντροπικός βαθμός απόδοσης</b> και ορίζεται διαφορετικά για συμπίεσεις και εκτονώσεις.</p>
--	---

Έστω ένα αέριο (όχι κατ' ανάγκη τέλει), το οποίο βρίσκεται σε πίεση  $p_1$  και συμπιέζεται αδιαβατικά μέχρι τελικής πίεσης  $p_2$ . Αν η συμπίεση ήταν θερμοδυναμικά τέλεια, τότε η αναγκαία ποσότητα τεχνικού έργου που θα δινόταν για τη συμπίεση θα ήταν (βάσει της διατύπωσης του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος σε ανοιχτά συστήματα) ίσο προς  $h_{2, is} - h_1$ . Επειδή, όμως, η συμπίεση είναι μη αντιστρεπτή, τότε το έργο που πρέπει να δοθεί είναι εν τέλει  $h_2 - h_1$ , δηλαδή περισσότερο απ' ότι θα δινόταν στο ιδανικό «σενάριο». Το πηλίκο των δύο διαφορών ενθαλπιών λέγεται **ισεντροπικός βαθμός απόδοσης της συμπίεσης** και ορίζεται ως:

$$\eta_{is,c} = \frac{h_{2, is} - h_1}{h_2 - h_1} \quad (1.43)$$

και, ως βαθμός απόδοσης, είναι πάντα χαμηλότερος της μονάδας.

το ίδιο αέριο τώρα βρίσκεται σε υψηλή πίεση  $p_2$  (κατάσταση «3») και εκτονώνεται αδιαβατικά στη χαμηλότερη πίεση  $p_1$ . Αν η εκτόνωση ήταν θερμοδυναμικά τέλεια, το τεχνικό έργο που θα αποδιδόταν θα ήταν  $h_3 - h_{4, is}$ . Στην πράξη, το έργο που παράγεται είναι μικρότερο από το ιδανικό, και ίσο προς  $h_3 - h_4$ . Ο **ισεντροπικός βαθμός απόδοσης της εκτόνωσης** είναι ίσος προς:

$$\eta_{is,t} = \frac{h_3 - h_4}{h_3 - h_{4, is}} \quad (1.44)$$

### 1.11. ΘΕΩΡΙΑ ΑΤΜΩΝ – ΠΙΝΑΚΕΣ ΝΕΡΟΥ & ΥΔΡΑΤΜΟΥ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ MOLLIER

Είναι γνωστό ότι οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί να εμφανίζεται ένα σώμα λέγονται φάσεις (όπως αέρια, υγρή και στερεά). Δεν είναι σύνηθες να συνυπάρχουν και οι τρεις φάσεις (κάτι που γίνεται στο τριπλό σημείο), όμως δεν είναι σπάνιο να συνυπάρχουν δύο φάσεις: έχουμε, εξ άλλου ορίσει ήδη το μηδέν της κλίμακας Κελσίου στο σημείο ισορροπίας πάγου και νερού και το 100 της ίδιας κλίμακας στο σημείο ισορροπίας νερού και ατμού.

Οι μεταβολές των φάσεων δεν είναι απότομες. Αντίθετα, χαρακτηρίζονται από μια «μεταβατική» κατάσταση, η οποία λαμβάνει χώρα υπό σταθερή θερμοκρασία. Ας θεωρηθεί, για το σκοπό αυτό, μια ποσότητα πάγου υπό ατμοσφαιρική πίεση, στην οποία προσδίδεται συνεχώς θερμότητα.

- Όσο η θερμοκρασία του πάγου είναι μικρότερη των 0°C, η πρόσδοση της θερμότητας συνοδεύεται από αύξηση της θερμοκρασίας, **χωρίς αλλαγή της φάσης**.
- Όταν ο πάγος φτάσει στους 0°C, τότε **η θερμοκρασία του σταθεροποιείται** και αυτός αρχίζει να **τήκεται**.
- Αφού ο πάγος μεταβεί πλήρως στην υγρή φάση, η πρόσδοση της θερμότητας οδηγεί σε συνεχή αύξηση της θερμοκρασίας.
- Όταν η θερμοκρασία του νερού προσεγγίσει τους 100°C, τότε στην ποσότητα του νερού εμφανίζεται **η πρώτη φυσαλίδα ατμού**.
- Το νερό πλέον έχει εισέλθει στη **διφασική περιοχή**. Εδώ η πρόσδοση της θερμότητας χρησιμοποιείται μόνο για την αλλαγή της φάσης, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία. Η κατανομή του μείγματος μεταξύ νερού και ατμού κλίνει συνεχώς προς τον ατμό. Η θερμότητα που απορροφάται για την αλλαγή φάσης λέγεται **λανθάνουσα θερμότητα ατμοποίησης**.
- Αφού το νερό ατμοποιηθεί πλήρως (δηλαδή, εξατμιστεί και η τελευταία σταγόνα), τότε έχει παραχθεί **κεκορεσμένος ατμός**.

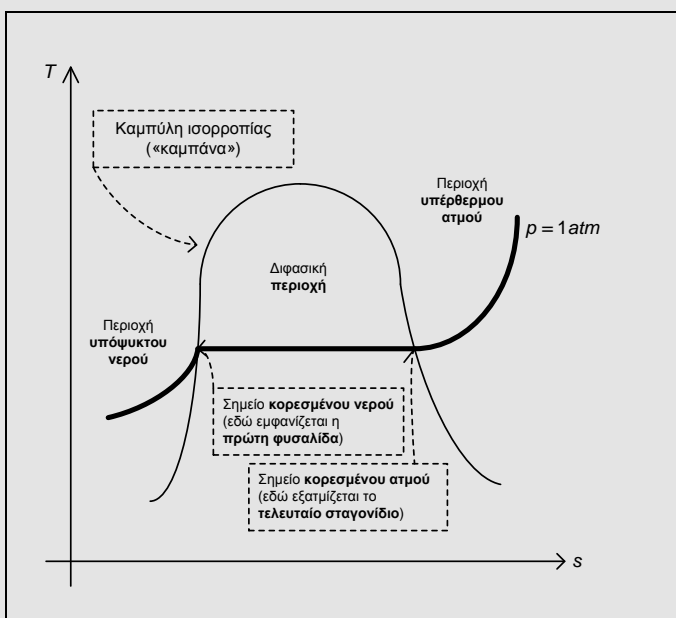
- Αν με κάποιον τρόπο ο κεκορεσμένος ατμός θερμανθεί επιπλέον, τότε παράγεται **υπέρθερμος ατμός**.

Το μέγεθος που ποσοτικοποιεί τη συνύπαρξη υγρής και ατμώδους φάσης εντός της διφασικής περιοχής λέγεται **βαθμός ξηρότητας** ή **βαθμός ποιότητας** του ατμού και ορίζεται από το κλάσμα:

$$x = \frac{m_g}{m_l + m_g} \quad (1.45)$$

Ακριβώς πριν την εμφάνιση της πρώτης φυσαλίδας ατμού, η μάζα της ατμώδους φάσης  $m_g$  είναι μηδενική (εκεί, το νερό λέγεται **κορεσμένο**), άρα εκεί είναι  $x = 0$ . Στον αντίποδα, ακριβώς μετά την ατμοποίηση του τελευταίου σταγονιδίου νερού, η μάζα της υγρής φάσης  $m_l$  είναι ομοίως μηδενική, οπότε εκεί είναι  $x = 1$ .

Τα παραπάνω γίνονται πιο κατανοητά στο ακόλουθο διάγραμμα  $T$ - $s$ , το οποίο περιγράφει τη διαδικασία ατμοποίησης νερού και θέρμανσης ατμού σε ατμοσφαιρική πίεση.



Για τη σωστή μελέτη οικείων διαγραμμάτων, θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν το ότι **εντός της διφασικής περιοχής, οι ισόθλιπτες ταυτίζονται με τις ισοθερμοκρασιακές**. Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι κατά την αλλαγή φάσης η θερμοκρασία παραμένει σταθερή.

Το διάγραμμα Mollier είναι ένα μέσο που, με ικανοποιητική ακρίβεια, μπορεί, με γνώση δύο καταστατικών μεγεθών του νερού (ή του ατμού) να δώσει όλα τα υπόλοιπα. Ωστόσο, η ακριβέστερη, αν και χρονικά λιγότερο συμφέρουσα, επιλογή είναι η χρήση **πινάκων ιδιοτήτων νερού & υδρατμού**. Οι πίνακες αυτοί συνήθως καλύπτουν:

- όλες τις ιδιότητες της κατάστασης κορεσμού, είτε ως συνάρτηση της πίεσης, είτε ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.
- πλήθος καταστάσεων υπέρθερμου ατμού, σαν συνάρτηση της πίεσης και της θερμοκρασίας

Είναι σαφές ότι οι πίνακες δε μπορούν να καλύψουν τις άπειρες καταστάσεις εντός της διφασικής περιοχής. Αν, όμως, είναι γνωστός ο βαθμός ξηρότητας του ατμού, τότε, αν είναι γνωστή μια

θερμοδυναμική παράμετρος σε κατάσταση κορεσμένου νερού (συμβολίζεται με έναν τόνο) και κορεσμένου ατμού (συμβολίζεται με δύο τόνους), είναι δυνατή η χρήση των σχέσεων για:

- την ενθαλπία  $h = h' \cdot (1 - x) + h'' \cdot x$
- την εντροπία  $s = s' \cdot (1 - x) + s'' \cdot x$
- τον όγκο  $v = v' \cdot (1 - x) + v'' \cdot x$
- την εσωτερική ενέργεια

### Παράδειγμα

Να βρεθούν οι θερμοδυναμικές ιδιότητες:

1. κορεσμένου νερού θερμοκρασίας  $160^\circ\text{C}$
2. κορεσμένου ατμού πίεσης  $5\text{bar}$
3. υπέρθερμου ατμού πίεσης  $50\text{bar}$  και θερμοκρασίας  $380^\circ\text{C}$ .
4. μείγματος νερού ατμού σε πίεση  $5\text{bar}$  και βαθμό ξηρότητας  $0.75$ .

### Λύση

(Για το ερώτημα 1)

Από τον πίνακα κορεσμού (θερμοκρασίας) για  $160^\circ\text{C}$ , λαμβάνεται:

- πίεση κορεσμού  $p = 6.181\text{bar}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου νερού  $v' = 0.0011\text{m}^3/\text{kg}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου ατμού  $v'' = 0.3068\text{m}^3/\text{kg}$
- λανθάνουσα θερμότητα ατμοποίησης  $r = 2081.3\text{kJ}/\text{kg}$
- ενθαλπία κορεσμένου νερού  $h' = 675.47\text{kJ}/\text{kg}$
- ενθαλπία κορεσμένου ατμού  $h'' = 2756.7\text{kJ}/\text{kg}$
- εντροπία κορεσμένου νερού  $s' = 1.9425\text{kJ}/\text{kg} \cdot \text{K}$
- εντροπία κορεσμένου ατμού  $s'' = 6.7475\text{kJ}/\text{kg} \cdot \text{K}$

(Για το ερώτημα 2)

Από τον πίνακα κορεσμού (πίεσης) για  $5\text{bar}$ , λαμβάνεται:

- θερμοκρασία κορεσμού  $t = 151.84^\circ\text{C}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου νερού  $v' = 0.0011\text{m}^3/\text{kg}$
- ειδικός όγκος κορεσμένου ατμού  $v'' = 0.3747\text{m}^3/\text{kg}$
- λανθάνουσα θερμότητα ατμοποίησης  $r = 2107.4\text{kJ}/\text{kg}$
- ενθαλπία κορεσμένου νερού  $h' = 640.12\text{kJ}/\text{kg}$
- ενθαλπία κορεσμένου ατμού  $h'' = 2747.5\text{kJ}/\text{kg}$
- εντροπία κορεσμένου νερού  $s' = 1.8604\text{kJ}/\text{kg} \cdot \text{K}$
- εντροπία κορεσμένου ατμού  $s'' = 6.8192\text{kJ}/\text{kg} \cdot \text{K}$



(Για το ερώτημα 3)

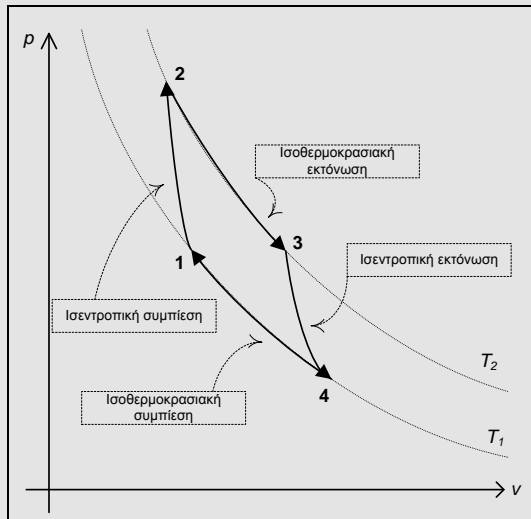
Από τον οικείο πίνακα ιδιοτήτων υπέρθερμου υδρατμού λαμβάνεται:

- ειδικός όγκος  $v = 0.0556 \text{ m}^3/\text{kg}$
- ενθαλπία  $h = 3148.8 \text{ kJ}/\text{kg}$
- εντροπία  $s = 6.5762 \text{ kJ}/\text{kg} \cdot \text{K}$

## 2. ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Έχοντας πλέον κατανοήσει τις θεμελιώδεις έννοιες της Θερμοδυναμικής, είναι πλέον δυνατό να γίνει ανάλυση των κυριότερων θερμοδυναμικών κύκλων που εφαρμόζονται σε πραγματικές ή θεωρητικές μηχανές. Κάθε θερμοδυναμικός κύκλος συνοδεύεται από ένα ενδεικτικό παράδειγμα, ώστε να γίνονται περισσότερο σαφείς οι ιδιαιτερότητές του

### 2.1. ΚΥΚΛΟΣ CARNOT – ΨΥΚΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ CARNOT – ΑΝΤΛΙΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ



Ο κύκλος Carnot αποτελείται από τέσσερις διαδοχικές μεταβολές, εκ των οποίων οι δύο είναι ισεντροπικές και οι άλλες δύο ισοθερμοκρασιακές. Λειτουργεί, σύμφωνα με το 2<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα, μεταξύ δύο θερμοκρασιακών σταθμών, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια ισοθερμοκρασιακή, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα p-v.

Θεωρώντας ως εργαζόμενο μέσο το τέλειο αέριο, είναι δυνατό να υπολογιστούν τα συναλλασσόμενα έργα και ποσά θερμότητας ανά μεταβολή.

(Ισεντροπική συμπίεση 1→2)

- Θερμότητα:  $q_{1 \rightarrow 2} = 0$
- Έργο:  $w_{1 \rightarrow 2} = -c_v \cdot (T_2 - T_1)$
- Αναλογία όγκων:  $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$

(Ισοθερμοκρασιακή εκτόνωση 2→3)

- Θερμότητα:  $q_{2 \rightarrow 3} = R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$
- Έργο:  $w_{2 \rightarrow 3} = R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{v_3}{v_2}\right)$

(Αδιαβατική εκτόνωση 3→4)

- Θερμότητα:  $q_{3 \rightarrow 4} = 0$
- Έργο:  $w_{3 \rightarrow 4} = -c_v \cdot (T_1 - T_2)$

- Αναλογία όγκων:  $\frac{v_3}{v_4} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$
- Θερμότητα:  $q_{4 \rightarrow 1} = R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{v_1}{v_4}\right)$
- Έργο:  $w_{4 \rightarrow 1} = R \cdot T_1 \cdot \ln\left(\frac{v_1}{v_4}\right)$

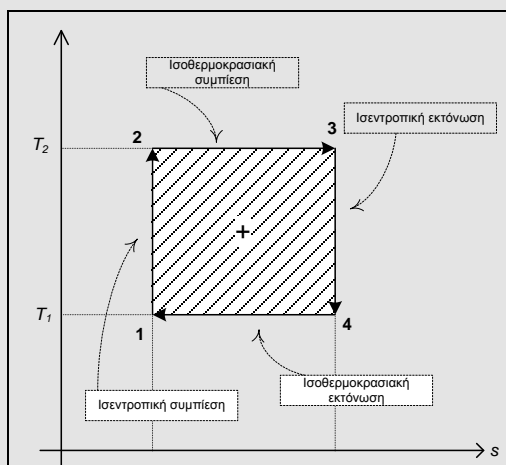
Βάσει των παραπάνω ποσών θερμότητας, αποδεικνύεται ότι ο βαθμός απόδοσης του κύκλου Carnot δίνεται από την απλή σχέση:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (2.1)$$

δηλαδή, ο βαθμός απόδοσης είναι συνάρτηση μόνο των δύο θερμοκρασιών, εντός των οποίων λειτουργεί ο κύκλος. Η παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας το 2<sup>ο</sup> Θερμοδυναμικό Αξίωμα, επεκτείνεται σε κάθε εργαζόμενο μέσο.

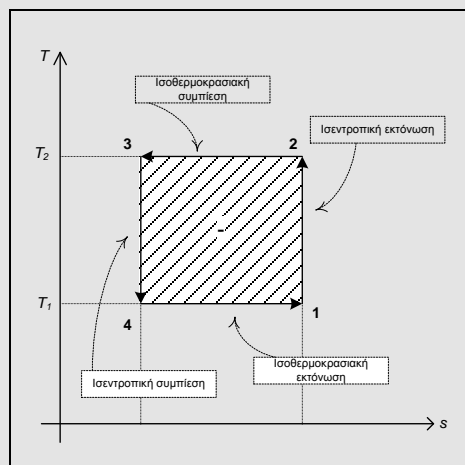
Ο κύκλος Carnot μπορεί να αποδειχτεί ότι αποτελεί τον κύκλο με το μεγαλύτερο βαθμό απόδοσης για τα δεδομένα θερμοκρασιακά όρια. Εξάγεται, επίσης, το χρήσιμο συμπέρασμα για τις θερμότητες και τις θερμοκρασίες:

$$\frac{q_{2 \rightarrow 3}}{T_2} + \frac{q_{4 \rightarrow 1}}{T_1} = 0 \quad (2.2)$$

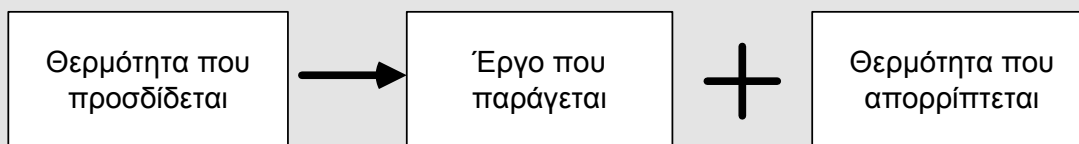


Στο διπλανό διάγραμμα  $T-s$  απεικονίζεται ένας εργοπαραγωγός κύκλος Carnot· το γραμμοσκιασμένο παραλληλόγραμμο εκφράζει το παραγόμενο έργο. Ο κύκλος Carnot είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί τεχνικά, εξ' αιτίας των δύο ισοθερμοκρασιακών, ωστόσο, όπως θα εξεταστεί σε επόμενη παράγραφο, οι άλλοι θερμοδυναμικοί κύκλοι «προσπαθούν» με διάφορους τρόπους να προσεγγίσουν τον κύκλο Carnot.

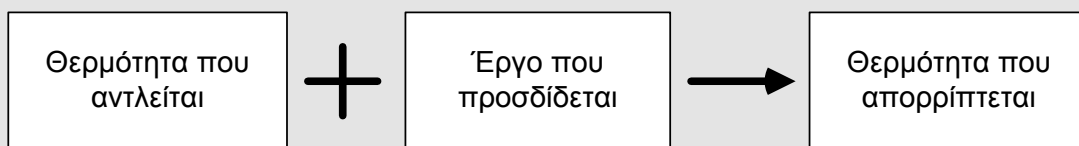
Με αναστροφή της φοράς του κύκλου, συντίθεται ο **ανάστροφος κύκλος Carnot** ή **ψυκτικός κύκλος Carnot**. Εδώ, **αντλείται θερμότητα** από το ψυχρό θερμοδοχείο προς το θερμό, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα  $T-s$ . Πως, όμως, ποσοτικοποιείται η απόδοση ενός ψυκτικού κύκλου;



Σε έναν εργοπαραγωγό κύκλο, η ροή της ενέργειας παρίσταται σχηματικά ως εξής:



και ο βαθμός απόδοσης προκύπτει απλά από τη διαίρεση του έργου που παράγεται προς την προσδιδόμενη θερμότητα. Αντίθετα, σε έναν ψυκτικό κύκλο η ροή είναι η ακόλουθη:



Είναι σαφές ότι ο ορισμός του βαθμού απόδοσης δε μπορεί να εφαρμοστεί εδώ. Αν, όμως, πρέπει να διατηρηθεί η λογική της ποσοτικοποίησης της απόδοσης του ψυκτικού κύκλου ως το πηλίκο του «τι παίρνουμε» προς το «τι δίνουμε», τότε απαιτείται ένα νέο μέγεθος: εδώ το «τι παίρνουμε» είναι η αντλούμενη θερμότητα από τον ψυχρόμενο χώρο και το «τι δίνουμε» είναι το έργο που παρέχεται στον κύκλο. Ορίζεται, λοιπόν, ο **συντελεστής συμπεριφοράς** (coefficient of performance, COP) ως:

$$COP = \frac{q_{4 \rightarrow 1}}{w_t} \quad (2.3)$$

Ο συντελεστής συμπεριφοράς ενός ψυκτικού κύκλου μπορεί να παίρνει τιμές μεγαλύτερες τις μονάδες (κάτι, εξ' άλλου που είναι κανόνας σε συνήθη ψυκτικά συστήματα). Ειδικά για τον ιδανικό κύκλο Carnot, ο συντελεστής συμπεριφοράς αποδεικνύεται ότι είναι συνάρτηση μόνο των θερμοκρασιών και δίνεται από την απλή σχέση:

$$COP_{c,Carnot} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (2.4)$$

Η **αντλία θερμότητας**, λοιπόν, είναι μια μηχανή που αξιοποιεί ψυχρά θερμοδοχεία για παραγωγή θερμότητας. Ας θεωρηθεί ένα περιβάλλον σε θερμοκρασία  $5^{\circ}\text{C}$  και ένας ψυχόμενος χώρος σε θερμοκρασία  $25^{\circ}\text{C}$ . Συνδέοντας μια αντλία θερμότητας μεταξύ των χώρων αυτών, αντλείται θερμότητα χαμηλής θερμοκρασίας από το περιβάλλον και με τη βοήθεια του μηχανικού έργου, αυτή απορρίπτεται στον θερμαινόμενο χώρο σε υψηλή θερμοκρασία. Η αρχή λειτουργίας της αντλίας θερμότητας μπορεί να βοηθήσει ώστε να γίνει κατανοητό ότι κάποια  $kJ$  ψυχρού αέρα περιβάλλοντος μπορούν με κάποιο τρόπο να μετατραπούν σε  $kJ$  υψηλής θερμοκρασίας.

Ο συντελεστής συμπεριφοράς μιας αντλίας θερμότητας ορίζεται διαφορετικά από αυτόν μιας ψυκτικής μηχανής. Ο λόγος είναι προφανής: και στις δύο μηχανές το «τι δίνουμε» (δηλαδή, ο παρονομαστής) είναι το προσδιδόμενο μηχανικό έργο· όμως στην αντλία θερμότητας το «τι παίρνουμε» είναι, όχι η αντλούμενη θερμότητα, αλλά αυτή που τελικά οδηγείται στο θερμαινόμενο χώρο, ώστε τελικά να είναι:

$$COP_{HP,Carnot} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \quad (2.5)$$

Θα μπορούσε, εδώ, κάποιος να θέσει το ερώτημα: για ποιο λόγο να επιλεγεί μια σύνθετη και πολύπλοκη κατασκευή σαν την αντλία θερμότητας για τη θέρμανση ενός χώρου, αντί των απλών ηλεκτρικών αντιστάσεων; Το ερώτημα αυτό θα απαντηθεί με ένα παράδειγμα. Ας θεωρηθεί ένας θερμαινόμενος χώρος, ο οποίος πρέπει να θερμαίνεται με  $2kW$  θερμότητας. Αν αυτή η θερμότητα παρείχετο από ιδανικούς αντιστάτες, τότε η ισχύς αυτών θα έπρεπε να είναι  $2kW$ . Στην περίπτωση, όμως, που χρησιμοποιείται αντλία θερμότητας, αυτά τα  $2kW$  αποτελούν, όπως αναφέρθηκε, την απορριπτόμενη θερμότητα, η οποία είναι συνισταμένη της αντλούμενης θερμότητας και του μηχανικού έργου, άρα μόνο ένα ποσοστό των  $2kW$  θα αντιστοιχεί στην κατανάλωση ενέργειας (δηλαδή, στο προσδιδόμενο μηχανικό έργο)· το υπόλοιπο θα έρχεται χωρίς δαπάνη από το περιβάλλον. Τοποθετώντας μια αντλία θερμότητας με COP της τάξης του 4.5, η σχέση (2.5) δίνει:

$$COP_{HP} = \frac{\{\text{τι\_παιρνουμε}\}}{\{\text{τι\_δινουμε}\}} = \frac{2kW}{w_t} = 4.5$$

$$\Rightarrow w_t = \frac{2kW}{4.5} = 0.44W$$

δηλαδή, ο χώρος θερμαίνεται με δαπάνη ισχύος κατά 78% χαμηλότερη από αυτή των αντιστάτων! Σημειώνεται, τέλος, η χρήσιμη σχέση που συνδέει τους COP ενός ψυγείου και μιας αντλίας θερμότητας που χρησιμοποιούν το κύκλο Carnot και λειτουργούν μεταξύ των ίδιων θερμοκρασιών:

$$COP_{HP,Carnot} = COP_{c,Carnot} + 1 \quad (2.6)$$

### Παράδειγμα

Θεωρείται περιβάλλον σε θερμοκρασία  $10^{\circ}\text{C}$ . Να υπολογιστούν:

1. η απαιτούμενη θερμοκρασία που πρέπει να έχει το θερμοδοχείο, ώστε μια εργοπαραγωγός μηχανή Carnot να επιτυγχάνει βαθμό απόδοσης 0.55.
2. η θερμοκρασία που μπορεί να αποκαταστήσει σε έναν ψυκτικό θάλαμο μια ψυκτική μηχανή Carnot, η οποία λειτουργεί με COP 2.5.

3. η καταναλισκόμενη ηλεκτρική ισχύς μιας αντλίας θερμότητας κατά Carnot για τη θέρμανση χώρου θερμοκρασίας  $30^{\circ}\text{C}$ , του οποίου το φορτίο θέρμανσης είναι  $1.5\text{kW}$ . Αν ο βαθμός απόδοσης του συστήματος παραγωγής, μεταφοράς και διανομής ηλεκτρικής ενέργειας είναι 0.3, να συγκριθεί από ενεργειακής άποψης η αντλία θερμότητας με έναν καυστήρα φυσικού αερίου, με βαθμό απόδοσης 0.90.

### Λύση

(Για το ερώτημα 1). Από τη σχέση (2.1) προκύπτει:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 0.55 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0.45 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{0.45} = \frac{283\text{K}}{0.45} = 629\text{K} = 356^{\circ}\text{C}$$

(Για το ερώτημα 2): Από τη σχέση (2.4) λαμβάνεται

$$COP_{c,Carnot} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{283\text{K} - T_1} = 2.5 \Rightarrow T_1 = 202\text{K} = -71^{\circ}\text{C}$$

(Για το ερώτημα 3): Η σχέση (2.5) δίνει το συντελεστή συμπεριφοράς της αντλίας θερμότητας

$$COP_{HP,Carnot} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = \frac{303\text{K}}{(303 - 283)\text{K}} = 15.15$$

άρα η απαιτούμενη ηλεκτρική ισχύς για τη θέρμανση του χώρου είναι

$$w_t = \frac{1.5\text{kW}}{15.15} = 0.099\text{kW}$$

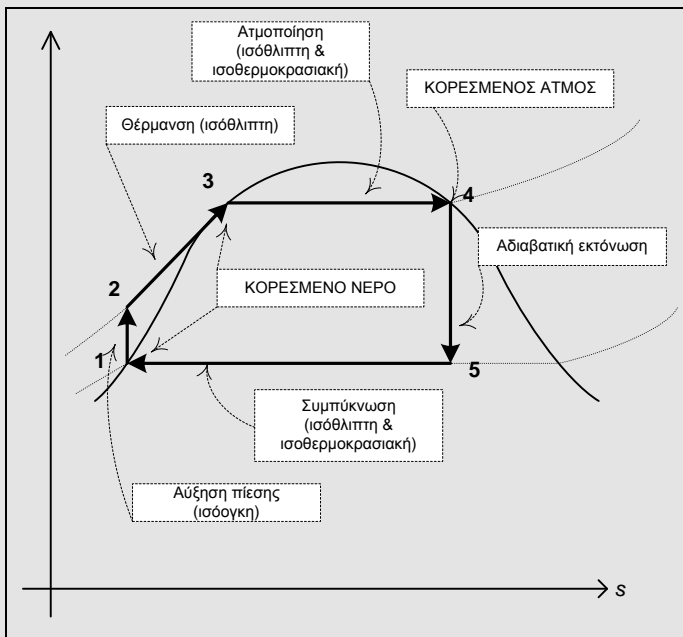
για την παραγωγή της οποίας απαιτούνται  $w_{el} = \frac{0.099\text{kW}}{0.3} = 0.330\text{kW} \xrightarrow{NG} = 6.8 \frac{\text{g}_{NG}}{\text{s}}$ . Αν

η θερμότητα παραγόταν από τον καυστήρα φυσικού αερίου, τότε η κατανάλωση καυσίμου θα ήταν ίση

προς  $\dot{m}_{NG} = \frac{1.5\text{kW}}{48000 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}_{NG}}} = 35 \frac{\text{g}_{NG}}{\text{s}}$ , δηλαδή σχεδόν πενταπλάσια σε σχέση με την κατανάλωση

της αντλίας θερμότητας. Στο σημείο αυτό πρέπει να τονιστεί ότι οι COP των πραγματικών αντλιών θερμότητας είναι αρκετά χαμηλότεροι από αυτόν κατά Carnot, ωστόσο οι συνήθεις αντλίες οδηγούν σε χαμηλότερη κατανάλωση πρωτογενούς ενέργειας σε σχέση με την απευθείας καύση ορυκτών καυσίμων.

## 2.2. ΚΥΚΛΟΣ CLAUSIUS - RANKINE



Ο κύκλος Clausius – Rankine αποτελεί μια εύκολα υλοποιήσιμη εναλλακτική λύση προς τον κύκλο Carnot. Σε αυτόν βασίζεται η λειτουργία των θερμοηλεκτρικών σταθμών με στερεά, υγρά και αέρια καύσιμα, των μονάδων συνδυασμένου κύκλου και των ατμομηχανών.

### 2.2.1. Κύκλος Κεκορεσμένου Ατμού

Στο διπλανό σκαρίφημα απεικονίζεται ένας απλός κύκλος Clausius – Rankine κεκορεσμένου ατμού. Στο σημείο «1» υπάρχει κορεσμένο νερό, το οποίο διέρχεται από τις τροφοδοτικές αντλίες· εκεί καταθλίβεται ισόογκα, ως το σημείο «2», όπου αρχίζει η θέρμανσή του. Η θέρμανση αυτή μετατρέπει το υπόψυκτο νερό σε κορεσμένο (σημείο «3») και ακολούθως το οδηγεί στη διφασική περιοχή, με τελικό προορισμό τον κεκορεσμένο ατμό (σημείο «4»). Ο ατμός αυτός οδηγείται σε ατμοστρόβιλο, όπου αποτονώνεται αδιαβατικά, μέχρι της τελικής πίεσής του (σημείο «5»), το δε διφασικό μείγμα οδηγείται στο συμπυκνωτή ώστε ο κύκλος να κλείσει.

Ο βαθμός απόδοσης του κύκλου αυτού προκύπτει με βάση τις ενθαλπίες των σημείων του κύκλου, ίσος προς:

$$\eta_{Rankine, sat} = \frac{\overbrace{(h_4 - h_5)}^{\text{ατμοστρόβιλος}} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{αντλίες}}}{h_4 - h_2} \quad (2.7)$$

αν και πολλές φορές το έργο που αναλώνεται στις αντλίες δε συνυπολογίζεται στο βαθμό απόδοσης ως αμελητέο. Οι τιμές των ενθαλπιών λαμβάνονται από το διάγραμμα Mollier ή πίνακες ιδιοτήτων νερού – υδρατμού, ώστε ο βαθμός απόδοσης να υπολογίζεται εύκολα.

Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι στους κύκλους νερού – υδρατμού δεν ισχύουν οι προσεγγίσεις τελείου αερίου, άρα δεν πρέπει αυτές να χρησιμοποιούνται σε καμία περίπτωση. Αντίθετα, οι ορισμοί και τα αξιώματα, τα οποία είναι γενικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν (π.χ. στην παραπάνω σχέση για τις αδιαβατικές συμπίεσεις και εκτονώσεις και την ισοθερμοκρασιακή συμπίκνωση χρησιμοποιήθηκε σιωπηρά η έκφραση του 1<sup>ου</sup> Θερμοδυναμικού Αξιώματος σε ανοιχτά συστήματα).

**Παράδειγμα**

Απλός κύκλος Clausius – Rankine λειτουργεί με κεκορεσμένο ατμό και αποτονώνει αδιαβατικά από τα 40bar ως τα 50mbar. Να υπολογιστεί ο βαθμός απόδοσής του και να συγκριθεί με το βαθμό απόδοσης ενός κύκλου Carnot που λειτουργεί στο ίδιο εύρος θερμοκρασιών. (Η κατανάλωση της αντλίας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα).

**Λύση**

Από τη σχέση (2.7) και για  $h_1 \square h_2$ , ο βαθμός απόδοσης είναι

$$\eta_{Rankine,sat} = \frac{h_4 - h_5}{h_4 - h_1}$$

p	t	v'	v''	ρ''	h'	h''	r	s'	s''
0.045					...				
0.050	81.345	0.0010301	3.240	0.3086	340.56	2646.0	2305.4	1.0912	7.5947
0.055					...				
					...				
39					...				
40	250.33	0.0012521	0.04975	20.10	1087.4	2800.3	1712.9	2.7965	6.0685
41					...				

Οι ενθαλπίες στα σημεία «1» και «4» λαμβάνονται από το παραπάνω απόσπασμα πίνακα κορεσμού (για πίεση) ίσες προς  $h_4''|_{p=40bar} = 2800.3 kJ/kg$  και  $h_1'|_{p=0.05bar} = 340.56 kJ/kg$ . Η ενθαλπία του σημείου «5» θα υπολογιστεί ως εξής:

- είναι γνωστή η εντροπία του σημείου «4» και ίση προς  $s_4''|_{p=40bar} = 6.07 kJ/kg \cdot K$ . Αυτή είναι ίση με την εντροπία του σημείου «5», μιας και η αποτόνωση 4→5 είναι ισηντροπική.
- είναι επίσης γνωστές οι εντροπίες κορεσμού στην πίεση αποτόνωσης, ίσες προς  $s_4'|_{p=0.05bar} = 1.09 kJ/kg \cdot K$  και  $s_4''|_{p=0.05bar} = 7.60 kJ/kg \cdot K$ . Άρα, από την §1.10 μπορεί να υπολογιστεί ο βαθμός ξηρότητας του ατμού, ως εξής:

$$s_5 = s_4'|_{p=0.05bar} \cdot (1 - x) + s_4''|_{p=0.05bar} \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{s_5 - s_4'|_{p=0.05bar}}{s_4''|_{p=0.05bar} - s_4'|_{p=0.05bar}} = \frac{(6.07 - 1.09) kJ/kg \cdot K}{(7.60 - 1.09) kJ/kg \cdot K} = 0.76$$



- με όμοιο τρόπο υπολογίζεται η ενθαλπία της κατάστασης «5»:

$$h_5 = h' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot (1-x) + h'' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_5 = 340.56 \text{ kJ/kg} \cdot 0.24 + 2646.0 \text{ kJ/kg} \cdot 0.76 = 2092.7 \text{ kJ/kg}$$

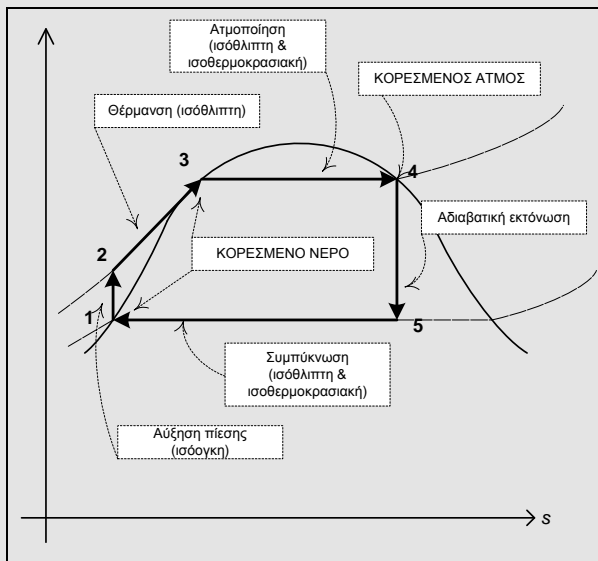
Πλέον είναι διαθέσιμα όλα τα απαραίτητα στοιχεία για τον υπολογισμό του βαθμού απόδοσης:

$$\eta_{\text{Rankine, sat}} = \frac{(2800.3 - 2092.7) \text{ kJ/kg}}{(2800.3 - 340.56) \text{ kJ/kg}} = 28.8\%$$

- ο δε βαθμός απόδοσης ενός κύκλου Carnot στις ίδιες θερμοκρασίες θα ήταν:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_4} \xrightarrow{\text{πινακός κορεσμού}} = 1 - \frac{(81.3 + 273) \text{ K}}{(250.3 + 273) \text{ K}} = 32.3\%$$

### 2.2.2. Κύκλος Υπέρθερμου Ατμού



Μετεξέλιξη του κύκλου κεκορεσμένου ατμού αποτέλεσε ο **κύκλος υπέρθερμου ατμού**. Σε αυτόν, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα  $T-s$ , μετά την πλήρη ατμοποίηση του νερού (κατάσταση «4»), ο ατμός παραλαμβάνει επιπλέον ποσό θερμότητας, ώστε να υπερθερμανθεί ως την κατάσταση «5». Εκεί οδηγείται στον ατμοστρόβιλο, όπου αποτονώνεται μέχρι τη χαμηλή πίεση (κατάσταση «6») και ακολούθως συμπυκνώνεται. Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, ο βαθμός απόδοσης του κύκλου υπέρθερμου ατμού είναι ίσος προς

$$\eta_{\text{Rankine, sh}} = \frac{\overbrace{(h_5 - h_6)}^{\text{ατμοστρόβιλος}} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{αντλίες}}}{h_5 - h_2} \square \frac{h_5 - h_6}{h_5 - h_2} \quad (2.7)$$

### Παράδειγμα

Ο κεκορεσμένος ατμός του προηγούμενου παραδείγματος υπερθερμαίνεται ως τους 435°C. Να υπολογιστεί ο βαθμός απόδοσής του και να συγκριθεί με το βαθμό απόδοσης ενός κύκλου Carnot που λειτουργεί στο ίδιο εύρος θερμοκρασιών. (Η κατανάλωση της αντλίας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα).

### Λύση

Η ενθαλπία του σημείου «5» ευρίσκεται από πίνακες ιδιοτήτων νερού και υδρατμού, ίση προς  $h_5 = 3296.9 \text{ kJ/kg}$ . Απαιτείται επίσης η ενθαλπία του σημείου «6», η οποία θα υπολογιστεί με το γνωστό τρόπο:

- είναι γνωστή η εντροπία του σημείου «5» και ίση προς  $s_5 = 6.89 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ . Αυτή είναι ίση με την εντροπία του σημείου «6», μιας και η αποτόνωση 5→6 είναι, κατά τα γνωστά, ισεντροπική.
- είναι επίσης γνωστές οι εντροπίες κορεσμού στην πίεση αποτόνωσης, ίσες προς  $s_6' \Big|_{p=0.05\text{bar}} = 1.09 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$  και  $s_6'' \Big|_{p=0.05\text{bar}} = 7.60 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ , ώστε να μπορεί να υπολογιστεί ο βαθμός ξηρότητας του ατμού, ως εξής:

$$s_6 = s' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot (1 - x_6) + s'' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot x_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_6 = \frac{s_6 - s' \Big|_{p=0.05\text{bar}}}{s'' \Big|_{p=0.05\text{bar}} - s' \Big|_{p=0.05\text{bar}}} = \frac{(6.89 - 1.09) \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}}{(7.60 - 1.09) \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} = 0.89$$

- τέλος, υπολογίζεται η ενθαλπία της κατάστασης «6»:

$$h_6 = h' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot (1 - x_6) + h'' \Big|_{p=0.05\text{bar}} \cdot x_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_6 = 340.56 \text{ kJ/kg} \cdot 0.11 + 2646.0 \text{ kJ/kg} \cdot 0.89 = 2392.4 \text{ kJ/kg}$$

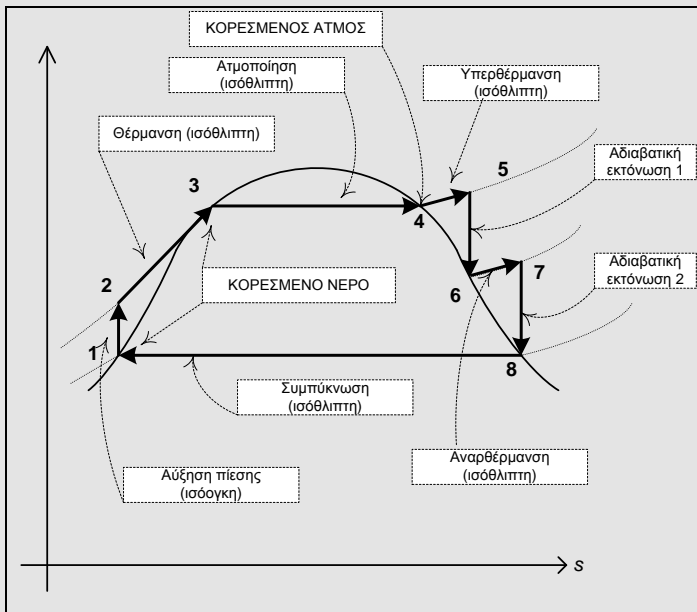
Επομένως, είναι:

$$\eta_{\text{Rankine, sh}} = \frac{(3296.9 - 2392.4) \text{ kJ/kg}}{(3296.9 - 340.56) \text{ kJ/kg}} = 30.6\%$$

- ο δε βαθμός απόδοσης ενός κύκλου Carnot στις ίδιες θερμοκρασίες θα ήταν:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_5} \xrightarrow{\text{πίνακες\_κορεσμου}} 1 - \frac{(81.3 + 273) \text{ K}}{(435 + 273) \text{ K}} = 50.0\%$$

### 2.2.3. Κύκλος Υπέρθερμου Ατμού με Αναθέρμανση



Με σκοπό την υψηλότερη αύξηση του βαθμού απόδοσης του κύκλου Clausius – Rankine, υπάρχει η δυνατότητα διακοπής της αποτόνωσης, όταν ο ατμός φτάσει σε κατάσταση κορεσμού (κατάσταση «6») και αναθέρμανσής του ως την κατάσταση «7», όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα T-s. Με τον τρόπο αυτό αξιοποιείται πιο αποδοτικά η προσδιδόμενη θερμότητα. Εδώ ο βαθμός απόδοσης ορίζεται με πιο σύνθετο τρόπο, μιας και η θερμότητα και το έργο προσδίδονται και αποδίδονται αντίστοιχα σε δύο φάσεις:

$$\eta_{Rankine,rh} = \frac{\overbrace{(h_5 - h_6)}^{\text{ατμοστρόβιλος}_1} + \overbrace{(h_7 - h_8)}^{\text{ατμοστρόβιλος}_2} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{αντλίες}}}{\underbrace{(h_5 - h_2)}_{\text{θέρμανση}} + \underbrace{(h_7 - h_6)}_{\text{θέρμανση}}} \square \frac{h_5 + h_7 - h_6 - h_8}{h_5 + h_7 - h_2 - h_6} \quad (2.8)$$

#### Παράδειγμα

Ο υπέρθερμος ατμός που έχει παραχθεί στο προηγούμενο παράδειγμα αποτονώνεται αδιαβατικά μέχρι να γίνει κορεσμένος. Στην πίεση αυτή, υφίσταται υπερθέρμανση μέχρι τελικής θερμοκρασίας 250°C. Εκεί, εισέρχεται σε ατμοστρόβιλο, ο οποίος λειτουργεί με ισεντροπικό βαθμό απόδοσης 95%, και αποτονώνεται. Να υπολογιστεί ο βαθμός απόδοσής του και να συγκριθεί με το βαθμό απόδοσης ενός κύκλου Carnot που λειτουργεί στο ίδιο εύρος θερμοκρασιών. (Η κατανάλωση της αντλίας μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα).

#### Λύση

Η εντροπία του σημείου «5» έχει βρεθεί ότι είναι ίση προς  $s_5 = 6.89 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ . Την ίδια τιμή θα έχει και η εντροπία στο σημείο «6» (αφού η εκτόνωση είναι ισεντροπική), οπότε στους πίνακες κορεσμού (πίεσης) αναζητείται η πίεση εκείνη, ο κεκορεσμένος ατμός της οποίας έχει εντροπία  $s_6'' = 6.89 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ . Τελικά, η ζητούμενη πίεση είναι ίση προς 4bar, η δε ενθαλπία του σημείου «6»

είναι (από τον ίδιο πίνακα)  $h_6'' = 2737.6 \text{ kJ/kg}$ . Για τη δεδομένη πίεση σε θερμοκρασία  $250^\circ\text{C}$ , οι πίνακες ιδιοτήτων υπέρθερμου ατμού δίνουν  $h_7 = 2964.5 \text{ kJ/kg}$  και  $s_7 = 7.38 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ .

Αν η 2<sup>η</sup> αποτόνωση ήταν ισεντροπική, τότε η εντροπία του σημείου «8» θα ήταν  $s_{8, is} = s_7 = 7.38 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ , ο βαθμός ξηρότητάς του θα υπολογιζόταν ίσος προς:

$$x_{8, is} = \frac{s_{8, is} - s'_{p=0.05 \text{ bar}}}{s''_{p=0.05 \text{ bar}} - s'_{p=0.05 \text{ bar}}} = \frac{(7.38 - 1.09) \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}}{(7.60 - 1.09) \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}} = 0.97$$

και η ενθαλπία του θα ήταν:

$$\begin{aligned} h_{8, is} &= h'_{p=0.05 \text{ bar}} \cdot (1 - x_{8, is}) + h''_{p=0.05 \text{ bar}} \cdot x_{8, is} \Rightarrow \\ \Rightarrow h_{8, is} &= 340.56 \text{ kJ/kg} \cdot 0.03 + 2646.0 \text{ kJ/kg} \cdot 0.97 = 2576.8 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Όμως, η αποτόνωση **δεν** είναι ισεντροπική, άρα η πραγματική ενθαλπία του σημείου «8» είναι (βλ. εξίσωση (1.44)):

$$\begin{aligned} \eta_{is,t} &= \frac{h_7 - h_8}{h_7 - h_{8, is}} \Rightarrow h_8 = h_7 - \eta_{is,t} \cdot (h_7 - h_{8, is}) \Rightarrow \\ \Rightarrow h_8 &= 2964.5 \text{ kJ/kg} - 0.95 \cdot (2964.5 - 2576.8) \text{ kJ/kg} = 2596.2 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

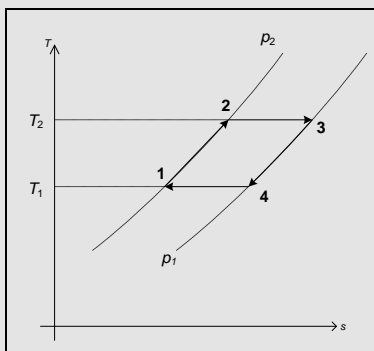
οπότε ο βαθμός απόδοσης του κύκλου είναι:

$$\eta_{Rankine, rh} \square \frac{h_5 + h_7 - h_6 - h_8}{h_5 + h_7 - h_2 - h_6} = \frac{(3296.9 + 2964.5 - 2737.6 - 2596.2) \text{ kJ/kg}}{(3296.9 + 2964.5 - 340.56 - 2737.6) \text{ kJ/kg}} = 29.1\%$$

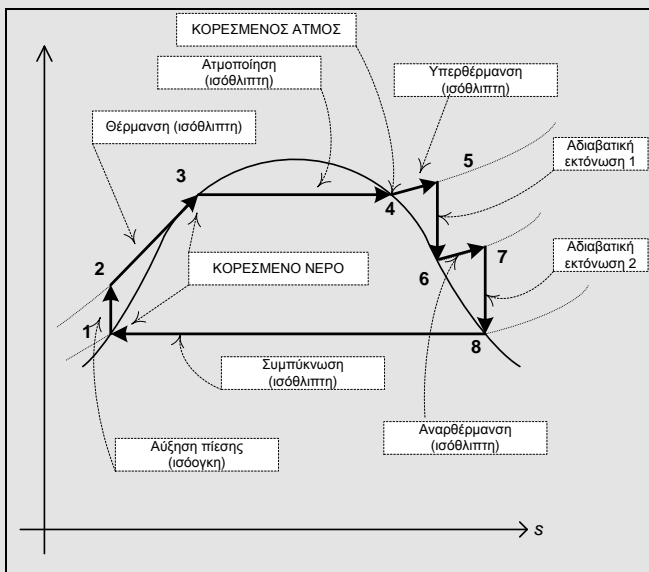
δηλαδή, χαμηλότερος απ' ότι στο προηγούμενο παράδειγμα! Σκοπός των δεδομένων αυτών ήταν να καταδειχτεί ότι κάθε κύκλος ατμού πρέπει να μελετάται εξ' αρχής και να μην αποτελεί απλά προσθήκη κάποιου επιπλέον στοιχείου σε υπάρχοντα κύκλο. Γενικά, πάντως, οι κύκλοι ανάθερμου ατμού, συνδυαζόμενοι με στοιχεία προθέρμανσης του τροφοδοτικού νερού, επιτυγχάνουν βαθμούς απόδοσης υψηλότερους του 39%.

### 2.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΕΡΙΟΣΤΡΟΒΙΛΩΝ – ΚΥΚΛΟΙ ERICSSON & JOULE - BRAYTON

Ο **κύκλος Ericsson** αποτελείται από δύο ισόθλιπτες και δύο ισοθερμοκρασιακές μεταβολές, όπως απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα  $T$ - $s$ . Αποδεικνύεται ότι ο κύκλος Ericsson έχει βαθμό απόδοσης ίσο προς  $\eta_{Ericsson} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ , δηλαδή όμοιο με αυτόν του κύκλου Carnot, πλεονεκτεί δε έναντι αυτού λόγω του ότι απαιτεί χαμηλότερο λόγο πιέσεων λειτουργίας.



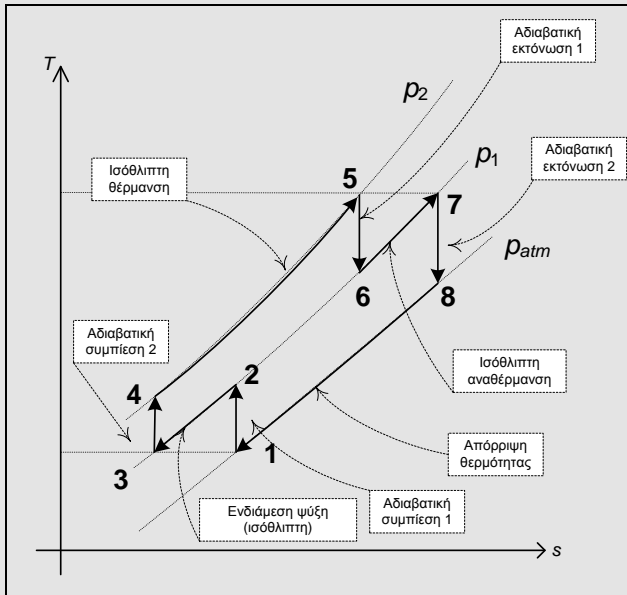
Οι ισοθερμοκρασιακές μεταβολές καθιστούν πρακτικά δύσκολη την εκτέλεση του κύκλου Ericsson, όμως λόγω του υψηλού βαθμού απόδοσής του, γίνεται προσπάθεια να προσεγγιστεί από άλλους θερμοδυναμικούς κύκλους.



Ο **κύκλος Joule – Brayton** περιγράφει τη λειτουργία των αεριοστρόβιλων. Συντίθεται από δύο ισεντροπικές μεταβολές και δύο ισόθλιπτες μεταβολές, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα  $T$ - $s$ . Το εργαζόμενο μέσο (στην πράξη, ατμοσφαιρικός αέρας – σημείο «1») αναρροφάται από αδιαβατικό συμπιεστή. Υπό υψηλή πίεση, ο αέρας θερμαίνεται μέσω καύσης κάποιου υγρού ή αέριου καυσίμου και οδηγείται στην υψηλή θερμοκρασία (σημείο «3»). Εκεί οδηγείται στον αδιαβατικό στρόβιλο, όπου αποτονώνεται μέχρι την ατμοσφαιρική πίεση. Διαπιστώνεται αμέσως ότι ένας κύκλος αεριοστρόβιλου αναμένεται ποιοτικά να είναι λιγότερο αποδοτικός από έναν κύκλο αμμοστρόβιλου, μιας και ο τελευταίος μπορεί να αποτονώνει μέχρι πολύ χαμηλές πιέσεις (μέχρι και  $50\text{mbar}$ ), σε αντίθεση με τον αεριοστρόβιλο, ο οποίος δε μπορεί να αποτονώσει σε πίεση μικρότερη της ατμοσφαιρικής.

Ο κύκλος Joule – Brayton απορροφά θερμότητα κατά τη θέρμανση και αποδίδει έργο ίσο με το έργο του στροβίλου μείον το έργο του συμπιεστή. Δηλαδή, ο βαθμός απόδοσής του υπολογίζεται απλά ως:

$$\eta_{JB} = \frac{\overbrace{(h_3 - h_4)}^{\text{στροβίλος}} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{συμπιεστή}}}{h_3 - h_2} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2} \xrightarrow{T.A.} = 1 - 1 - \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_{atm}}\right)^{\frac{k-1}{k}}} \quad (2.8)$$



Ένας τρόπος για την προσέγγιση του κύκλου Ericsson (άρα, του βαθμού απόδοσης του κύκλου Carnot) είναι η εφαρμογή **πολυβάθμιας συμπίεσης και αποτόνωσης** στον κύκλο Joule – Brayton, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα  $T-s$  (όπου απεικονίζεται μια διβάθμια συμπίεση και αποτόνωση). Ο αέρας συμπιέζεται μέχρι την ενδιάμεση πίεση  $p_1$ , κατόπιν ψύχεται ισόθλιπα μέχρι τη θερμοκρασία περιβάλλοντος, ύστερα συμπιέζεται μέχρι την τελική πίεση και θερμαίνεται. Η αποτόνωση γίνεται αρχικά μέχρι την ενδιάμεση πίεση, εκεί το εργαζόμενο μέσο (που πλέον είναι το καυσαέριο) αναθερμαίνεται μέχρι της ανωτάτης θερμοκρασίας θέρμανσης, όπως φαίνεται στο διάγραμμα και τελικώς αποτονώνεται στο περιβάλλον. Ο βαθμός απόδοσης της διβάθμιας συμπίεσης και αποτόνωσης υπολογίζεται από τις χαρακτηριστικές ενθαλπίες του κύκλου:

$$\eta_{JB\_2st} = \frac{\overbrace{(h_6 - h_5)}^{\text{στροβίλος}_1} + \overbrace{(h_8 - h_7)}^{\text{στροβίλος}_2} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{συμπιεστή}_1} - \overbrace{(h_4 - h_3)}^{\text{συμπιεστή}_2}}{\underbrace{(h_5 - h_4)}_{\text{κυρία_θέρμανση}} + \underbrace{(h_7 - h_6)}_{\text{αναθέρμανση}}} \quad (2.9)$$

Στο σημείο αυτό, θα μπορούσε να τεθεί το ερώτημα: ποια είναι η βέλτιστη ενδιάμεση πίεση; Η πίεση αυτή θα οδηγούσε σε ελαχιστοποίηση του απορροφούμενου έργου συμπίεσης και στη μεγιστοποίηση του παραγόμενου έργου αποτόνωσης. Το έργο συμπίεσης γράφεται:

$$w_{t,c} = w_{t,1 \rightarrow 2} + w_{t,3 \rightarrow 4} \xrightarrow{\text{αδιαβατικές συμπίεσεις}} = |\Delta h_{1 \rightarrow 2}| + |\Delta h_{3 \rightarrow 4}| = c_p \cdot (T_2 - T_1 + T_4 - T_3)$$

κι επειδή η ενδιάμεση ψύξη οδηγεί στη θερμοκρασία αναρρόφησης, είναι τελικά:

$$w_{t,c} = c_p \cdot (T_2 + T_4 - 2T_1) \Rightarrow \frac{w_{t,c}}{c_p} = T_2 + T_4 - 2T_1$$

Λόγω των αδιαβατικών συμπίεσεων 1→2 και 3→4, ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_{atm}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \\ T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \xrightarrow{T_3=T_1} T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \end{cases}$$

ώστε τελικά το τεχνικό έργο για τη διβάθμια συμπίεση να είναι:

$$\begin{aligned} \frac{w_{t,c}}{c_p} &= T_2 + T_4 - 2T_1 = T_1 \cdot \left(\frac{p_1}{p_{atm}}\right)^{\frac{k-1}{k}} + T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 2T_1 \\ \Rightarrow \frac{w_{t,c}}{c_p \cdot T_1} &= \left(\frac{p_1}{p_{atm}}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 2 \end{aligned}$$

Θέτοντας  $x = p_1$ ,  $f(x) = \frac{w_{t,c}}{c_p \cdot T_1}$  και  $a = \frac{k-1}{k}$ , η παραπάνω σχέση γράφεται απλούστερα, η δε

πρώτη παράγωγός της, η οποία είναι αναγκαία για την εύρεση του ελάχιστου έργου, είναι:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{p_{atm}}\right)^a + \left(\frac{p_2}{x}\right)^a - 2 \\ \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{1}{p_{atm}}\right)^a \cdot a \cdot x^{a-1} + p_2^a \cdot (-a) \cdot x^{-a-1} \end{aligned}$$

Αν το ζητούμενο ακρότατο εμφανίζεται στη θέση  $x_0$ , τότε θα πρέπει να είναι:

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{p_{atm}}\right)^a \cdot a \cdot x_0^{a-1} + p_2^a \cdot (-a) \cdot x_0^{-a-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{p_{atm}}\right)^a \cdot x_0^{a-1} - p_2^a \cdot x_0^{-a-1} = 0 \xrightarrow{\cdot p_{atm}^a} x_0^{a-1} - (p_{atm} \cdot p_2)^a \cdot x_0^{-a-1} = 0$$

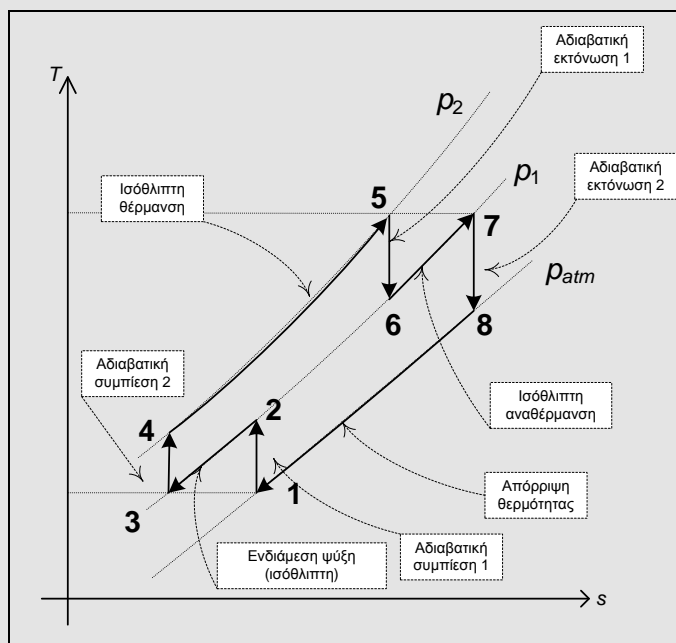
$$\Rightarrow x_0^{a-1} = (p_{atm} \cdot p_2)^a \cdot x_0^{-a-1} \Rightarrow \frac{x_0^{a-1}}{x_0^{-a-1}} = (p_{atm} \cdot p_2)^a \Rightarrow x_0^{a-1-(-a-1)} = (p_{atm} \cdot p_2)^a$$

$$\Rightarrow x_0^{2a} = (p_{atm} \cdot p_2)^a \Rightarrow x_0 = p_1 = \sqrt{p_{atm} \cdot p_2}$$

δηλαδή, η ενδιάμεση πίεση εξαρτάται μόνο από τις δύο ακραίες πιέσεις (και όχι από το είδος του τελείου αερίου) και είναι ίση προς το μέσο γεωμετρικό αυτών. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι αν η ίδια ενδιάμεση πίεση εφαρμοστεί και κατά τη διβάθμια εκτόνωση και αναθέρμανση, το παραγόμενο τεχνικό έργο μεγιστοποιείται. Γενικά, για  $n$ -βάθμια συμπίεση, αποδεικνύεται ότι βέλτιστες ενδιάμεσες πιέσεις προκύπτουν από τη σχέση  $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = \dots = \frac{p_1}{p_{atm}}$ .

**Παράδειγμα**

Αεριοστρόβιλος που χρησιμοποιεί ως εργαζόμενο μέσο ατμοσφαιρικό αέρα ισεντροπικού εκθέτη 1.4 (συμπεριφερόμενο ως τέλειο αέριο) αναρροφά από το περιβάλλον, θερμοκρασίας 27°C. Η συμπίεση και η αποτόνωση γίνονται σε δύο βαθμίδες, με ισεντροπικούς βαθμούς απόδοσης 92% σε κάθε περίπτωση, η δε μέγιστη θερμοκρασία του κύκλου είναι οι 1127°C. Οι πιέσεις λειτουργίας είναι  $p_{atm} = 1bar$ ,  $p_1 = 4bar$  και  $p_2 = 16bar$ . Να προσδιοριστεί ο βαθμός απόδοσης του κύκλου και η θερμοκρασία εξόδου από το δεύτερο στρόβιλο.



**Λύση**

Εφ' όσον το εργαζόμενο μέσο είναι τέλειο αέριο, οι διαφορές ενθαλπιών ανάγονται σε διαφορές θερμοκρασιών. Έτσι, θα πρέπει να βρεθούν οι θερμοκρασίες όλων των σημείων του κύκλου, όπως



αυτά φαίνονται στο διπλανό διάγραμμα T-s. Αν η συμπίεση ήταν ιδανική, τότε η θερμοκρασία στο σημείο «2» θα ήταν (βλ. εξ. (1.33)):

$$\frac{300K}{T_{2,is}} = \left(\frac{1bar}{4bar}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \Rightarrow T_{2,is} = 445.8K$$

Λόγω, όμως, του ισεντροπικού βαθμού απόδοσης, είναι:

$$\eta_{is,c} = \frac{h_{2,is} - h_1}{h_2 - h_1} \xrightarrow{T.A.} \frac{c_p}{c_p} = \frac{T_{2,is} - T_1}{T_2 - T_1} \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{T_{2,is} - T_1}{\eta_{is,c}} = 300K + \frac{(445.8 - 300)K}{0.92} = 458.5K$$

Ψύχοντας ισόθλιπα μέχρι τη θερμοκρασία περιβάλλοντος, δηλαδή τα 300K, η συμπίεση 3→4 υπό ιδανικές συνθήκες θα έδινε:

$$\frac{300K}{T_{4,is}} = \left(\frac{4bar}{16bar}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \Rightarrow T_{4,is} = 445.8K$$

και όμοια με πριν είναι:

$$T_4 = T_3 + \frac{T_{4,is} - T_3}{\eta_{is,c}} = 300K + \frac{(445.8 - 300)K}{0.92} = 458.5K$$

Η εκτόνωση 5→6 υπό ιδανικές συνθήκες θα οδηγούσε σε θερμοκρασία

$$\frac{1400K}{T_{6,is}} = \left(\frac{16bar}{4bar}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \Rightarrow T_{6,is} = 942.1K$$

όμως λόγω του ισεντροπικού βαθμού απόδοσης είναι:

$$\eta_{is,t} = \frac{h_5 - h_6}{h_5 - h_{6,is}} \xrightarrow{T.A.} = \frac{T_5 - T_6}{T_5 - T_{6,is}} \Rightarrow T_6 = T_5 - \eta_{is,t} \cdot (T_5 - T_{6,is}) = 1400K - 0.92 \cdot (1400 - 942.1)K = 978.7K$$

Η αναθέρμανση γίνεται μέχρι θερμοκρασίας 1400K, άρα ο δεύτερος στρόβιλος ιδανικά θα αποτόνωνε ως τους:

$$\frac{1400K}{T_{8,is}} = \left(\frac{4bar}{1bar}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \Rightarrow T_{8,is} = 942.1K$$

στην πραγματικότητα, όμως, η θερμοκρασία εξόδου από το στρόβιλο αυτό είναι ίση με:

$$T_8 = T_7 - T_{is,t} \cdot (T_7 - T_{8,is}) = 1400 - 0.92 \cdot (1400 - 942.1) = 978.7 = 705.7^\circ$$

Ο βαθμός απόδοσης του κύκλου αυτού προκύπτει από τη σχέση (2.9):

$$\eta_{JB\_2st} = \frac{\overbrace{(h_5 - h_6)}^{\text{στροβίλος}_1} + \overbrace{(h_7 - h_8)}^{\text{στροβίλος}_2} - \overbrace{(h_2 - h_1)}^{\text{συμπίεσης}_1} - \overbrace{(h_4 - h_3)}^{\text{συμπίεσης}_2}}{\underbrace{(h_5 - h_4)}_{\text{κυρία\_θερμανση}} + \underbrace{(h_7 - h_6)}_{\text{αναθερμανση}}}$$

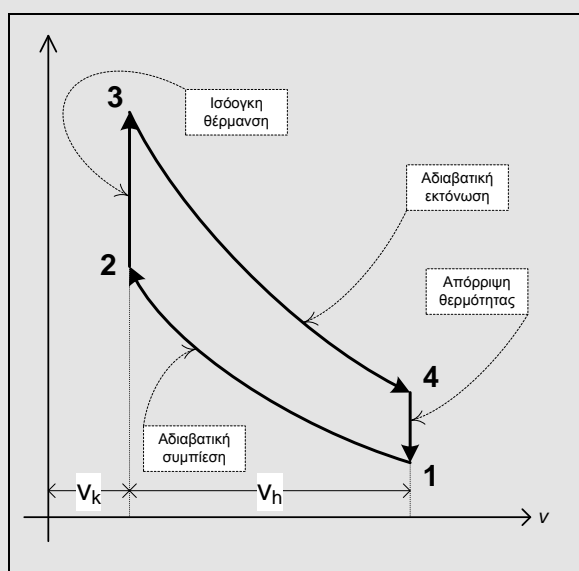
$$\xrightarrow{T.A.} = \frac{T_1 + T_3 + T_5 + T_7 - T_2 - T_4 - T_6 - T_8}{T_5 + T_7 - T_4 - T_6} = 42.8\%$$

Ο παραπάνω βαθμός απόδοσης είναι απόρροια της χρήσης τελείου αερίου και των όχι ιδιαίτερα δυσμενών ισεντροπικών βαθμών απόδοσης. Στην πράξη, ένας αεριοστρόβιλος επιτυγχάνει απόδοση της τάξης του 35% περίπου.

## 2.4. ΚΥΚΛΟΣ ΟΤΤΟ

Ο **κύκλος Otto** αποτελεί βάση λειτουργίας των βενζινοκινητήρων. Συντίθεται από δύο αδιαβατικές και δύο ισόογκες μεταβολές, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα  $p-v$ . Για τον κύκλο Otto υπάρχουν δύο χαρακτηριστικοί όγκοι:

- ο **επιζήμιος όγκος**: είναι ο όγκος που περικλείεται από την περιοχή της κεφαλής του κυλίνδρου μέχρι την κεφαλή του εμβόλου, όταν αυτό βρίσκεται στο Άνω Νεκρό Σημείο.
- ο **όγκος εμβολισμού**: είναι ο όγκος που σαρώνεται από το έμβολο μεταξύ των ακραίων σημείων κίνησης αυτού.



Η γνώση των δύο αυτών όγκων οδηγεί στον υπολογισμό της **σχέσης συμπίεσης**:

$$\varepsilon = \frac{V_k + V_h}{V_k} \tag{2.10}$$

Στον κύκλο προσδίδεται θερμότητα  $q_{2 \rightarrow 3} = c_v \cdot (T_3 - T_2)$ , ενώ απορρίπτεται  $|q_{4 \rightarrow 1}| = c_v \cdot (T_4 - T_1)$ , άρα το μηχανικό έργο που παράγεται είναι ίσο προς  $w_{Otto} = q_{2 \rightarrow 3} - |q_{4 \rightarrow 1}|$  και ο βαθμός απόδοσης είναι:

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{w_{Otto}}{q_{2 \rightarrow 3}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (2.11)$$

Στο παραπάνω διάγραμμα, λόγω της αδιαβατικής συμπίεσης και εκτόνωσης είναι:

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^k}{v_2^k} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k = \left(\frac{v_k + v_h}{v_k}\right)^k = \varepsilon^k = \dots = \frac{p_3}{p_4} \quad (2.12)$$

και:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\varepsilon^k\right)^{\frac{k-1}{k}} = \varepsilon^{k-1} \quad (2.13)$$

Λόγω της ισόογκης μεταβολής, εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = \varepsilon^{k-1} \quad (2.14)$$

οπότε τελικά ο βαθμός απόδοσης να υπολογίζεται ως:

$$\eta_{Otto} = 1 - \varepsilon^{1-k} \quad (2.15)$$

δηλαδή, ο βαθμός απόδοσης του κύκλου Otto για τέλειο αέριο είναι συνάρτηση μόνο της σχέσης συμπίεσης, όσο δε αυτή αυξάνεται, τόσο αυξάνεται και ο βαθμός απόδοσης, αν και στην πράξη υπάρχουν τεχνικοί περιορισμοί για τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η σχέση συμπίεσης.

### Παράδειγμα

Ποσότητα  $0.1 \text{ kg}$  τελείου αερίου, με αδιαβατικό εκθέτη  $1.4$  και μοριακό βάθος  $MB = 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ , υποβάλλεται σε κύκλο Otto εντός κυλίνδρου όγκου  $0.25 \text{ L}$ , εκ των οποίων ο όγκος εμβολισμού είναι  $0.05 \text{ L}$ . Αν είναι  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $t_1 = 300 \text{ K}$  και  $|q_{4 \rightarrow 1}| = 50 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ , να υπολογιστούν:

1. ο βαθμός απόδοσης του κύκλου
2. η μέγιστη θερμοκρασία που αναπτύσσεται.
3. η μέγιστη πίεση που εμφανίζεται κατά τον κύκλο.

### Λύση

(Για το ερώτημα 1): Από τη σχέση (2.10) προκύπτει η σχέση συμπίεσης:

$$\varepsilon = \frac{V_k + V_h}{V_k} = \frac{0.25L}{0.05L} = 5:1$$

άρα ο βαθμός απόδοσης υπολογίζεται ίσος προς:

$$\eta_{Otto} = 1 - 10^{1-1.4} = 47.5\%$$

(Για το ερώτημα 2): Μέσω της απορριπτόμενης θερμότητας, μπορεί να υπολογιστεί η θερμοκρασία του σημείου «4»:

$$\begin{aligned} |q_{4 \rightarrow 1}| &= c_v \cdot (T_4 - T_1) = \frac{R}{k-1} \cdot (T_4 - T_1) \\ \Rightarrow T_4 &= \frac{|q_{4 \rightarrow 1}| \cdot (k-1)}{R} + T_1 = \frac{50 \text{ kJ/kg} \cdot (1.4-1)}{\frac{8.314 \text{ kJ/kmol} \cdot \text{K}}{29 \text{ kmol/kg}}} + 300 \text{ K} = 369.8 \text{ K} \end{aligned}$$

συνεπώς, η θερμοκρασία του σημείου «3», η οποία είναι και η μέγιστη εμφανιζόμενη στον κύκλο, υπολογίζεται από τη σχέση (2.14):

$$\frac{T_3}{T_4} = \varepsilon^{k-1} \Rightarrow T_3 = T_4 \cdot \varepsilon^{k-1} = 369.8 \text{ K} \cdot 5^{1.4-1} = 704.0 \text{ K}$$

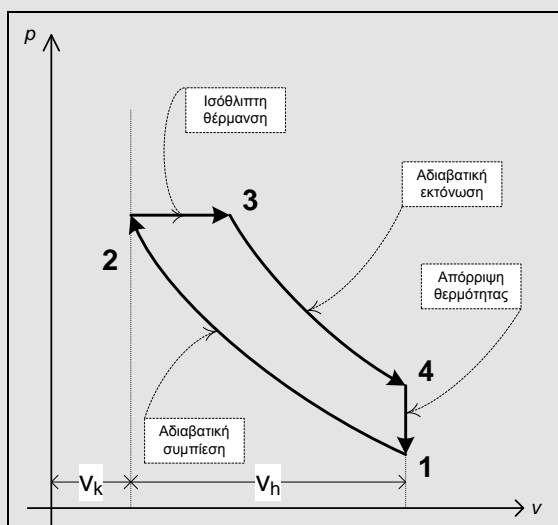
(Για το ερώτημα 3)

Ο ειδικός όγκος στην κατάσταση «3» είναι  $v_3 = \frac{V_3}{m} = \frac{V_k}{m} = \frac{0.05L}{0.1 \text{ kg}} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3}{0.1 \text{ kg}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}$ ,

άρα η καταστατική εξίσωση στο σημείο αυτό δίνει:

$$p_3 v_3 = R \cdot T_3 \Rightarrow p_3 = \frac{R \cdot T_3}{v_3} = \frac{\frac{8.314 \text{ kJ/kmol} \cdot \text{K}}{29 \text{ kmol/kg}} \cdot 704 \text{ K}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{kg}} = 4.04 \text{ bar}$$

## 2.5. ΚΥΚΛΟΣ DIESEL



Στον **κύκλο Diesel** βασίζεται η λειτουργία εμβολοφόρων μηχανών εσωτερικής καύσης πετρελαίου. Ο κύκλος, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα  $p-v$  αποτελείται από δύο αδιαβατικές μεταβολές, μια ισόογκη και μια ισόθλιπτη. Ο πραγματικός κύκλος Diesel είναι μια ιδιαίτερα αποδοτική μηχανή εσωτερικής καύσης (με βαθμό απόδοσης της τάξης του 48%) και διαφοροποιείται σε σχέση με τον Otto στον τρόπο καύσης, και συνεπακόλουθα στον τρόπο πρόσδοσης της θερμότητας: στον Otto, το καύσιμο εισέρχεται αναμεμιγμένο με τον αέρα καύσης στο κύλινδρο και, αφού συμπιεστεί, αναφλέγεται με χρήση σπινθήρα· στον Diesel, αντίθετα, ο αέρας εισέρχεται μόνος του στον κύλινδρο, συμπιέζεται και τότε το καύσιμο εγχύεται και αυταναφλέγεται.

Το ποσό θερμότητας που προσδίδεται στον κύκλο είναι κατά τα γνωστά  $q_{2 \rightarrow 3} = c_p \cdot (T_3 - T_2)$ , ενώ το ποσό που απορρίπτεται είναι  $|q_{4 \rightarrow 1}| = c_v \cdot (T_4 - T_1)$ . Ο βαθμός απόδοσης, επομένως, του κύκλου Diesel προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{w_{Diesel}}{q_{2 \rightarrow 3}} = \frac{c_p \cdot (T_3 - T_2) - c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{c_v}{c_p} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (2.16)$$

αποδεικνύεται, δε, ότι πώς ο βαθμός αυτός μπορεί να εκφραστεί από τους χαρακτηριστικούς όγκους του κύκλου, ως:

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^k - 1}{\frac{v_3}{v_2} - 1} \quad (2.17)$$

Ο λόγος  $\phi = v_3/v_2$  καλείται **λόγος αποκοπής** και είναι χαρακτηριστικός στη μηχανή Diesel, οπότε η σχέση (2.17) γίνεται:

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\varphi^k - 1}{\varphi - 1} \quad (2.18)$$

δηλαδή, ο βαθμός απόδοσης του κύκλου Diesel για τέλειο αέριο είναι συνάρτηση τόσο της σχέσης συμπίεσης, όσο και του λόγου αποκοπής. Όσο ο λόγος συμπίεσης αυξάνεται και ο λόγος αποκοπής μειώνεται, τόσο αυξάνεται και ο βαθμός απόδοσης, αν και στην πράξη υπάρχουν τεχνικοί περιορισμοί για τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβουν η σχέση συμπίεσης και ο λόγος αποκοπής.

### Παράδειγμα

Θεωρείται κύκλος Diesel, ο οποίος λειτουργεί μεταξύ πιέσεων  $p_1 = 1\text{bar}$  και  $p_2 = p_3 = 6\text{bar}$ , η δε θερμοκρασία στην έναρξή του είναι  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ . Η προσδιδόμενη θερμότητα είναι  $|q_{2 \rightarrow 3}| = 100 \text{kJ/kg}$  και το εργαζόμενο μέσο είναι τέλειο αέριο με ισεντροπικό εκθέτη 1.4 και μοριακό βάρος  $MB = 29 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$ . Να υπολογιστούν:

1. η σχέση συμπίεσης και ο ειδικός όγκος εμβολισμού
2. η μέγιστη θερμοκρασία που αναπτύσσεται
3. ο βαθμός απόδοσης

### Λύση

(Για το ερώτημα 1): Για το δεδομένο τέλειο αέριο είναι:

$$R = \frac{8.314 \text{kJ/kmol} \cdot \text{K}}{29 \text{kg/kmol}} = 0.287 \text{kJ/kg} \cdot \text{K}$$

οπότε μέσω της καταστατικής εξίσωσης του τελείου αερίου υπολογίζεται ο όγκος στη κατάσταση «1»:

$$v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1} = \frac{287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 300\text{K}}{10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0.861 \text{m}^3/\text{kg}$$

Λόγω της αδιαβατικής μεταβολής  $1 \rightarrow 2$ , ο ειδικός όγκος στη θέση «2» είναι:

$$v_2 = v_1 \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{k}} = 0.861 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot \left( \frac{1\text{bar}}{6\text{bar}} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 0.239 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

και τελικά ο ορισμός της σχέσης συμπίεσης δίνει:

$$\varepsilon = \frac{V_k + V_h}{V_k} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{0.861 \text{m}^3/\text{kg}}{0.239 \text{m}^3/\text{kg}} = 3.6:1$$

ο δε ειδικός όγκος εμβολισμού υπολογίζεται απλά ως:

$$v_h = v_1 - v_2 = (0.861 - 0.239) \frac{m^3}{kg} = 0.622 \frac{m^3}{kg}$$

(Για το ερώτημα 2): Βάσει της καταστατικής εξίσωσης, η θερμοκρασία στο σημείο «2» είναι

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot v_2}{R} = \frac{6 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot 0.239 \frac{m^3}{kg}}{287 \frac{N \cdot m}{kg \cdot K}} = 499.7 K$$

κατά συνέπεια, από την ισόθλιπτη μεταβολή 2→3 λαμβάνεται η μέγιστη θερμοκρασία του κύκλου:

$$q_{2 \rightarrow 3} = c_p \cdot (T_3 - T_2) \Rightarrow T_3 = \frac{q_{2 \rightarrow 3} \cdot (k - 1)}{k \cdot R} + T_2 = \frac{100 \frac{kJ}{kg} \cdot (1.4 - 1)}{1.4 \cdot 0.287 \frac{kJ}{kg \cdot K}} + 499.7 K = 599.3 K$$

(Για το ερώτημα 3): Ο ειδικός όγκος στη θέση «3» δίνεται από τη σχέση (1.23) (αλλά και από την καταστατική εξίσωση):

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{T_2}{T_3} \Rightarrow v_3 = v_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 0.239 \frac{m^3}{kg} \cdot \frac{599.3 K}{499.7 K} = 0.287 \frac{m^3}{kg}$$

ώστε ο βαθμός απόδοσης να είναι (βλ. εξίσωση (2.17))

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\epsilon^{k-1}} \cdot \frac{\left(\frac{v_3}{v_2}\right)^k - 1}{\frac{v_3}{v_2} - 1} = 1 - \frac{1}{1.4} \cdot \frac{1}{3.6^{1.4-1}} \cdot \frac{\left(\frac{0.287 \frac{m^3}{kg}}{0.239 \frac{m^3}{kg}}\right)^{1.4} - 1}{\frac{0.287 \frac{m^3}{kg}}{0.239 \frac{m^3}{kg}} - 1} = 37.8\%$$

### 3. ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

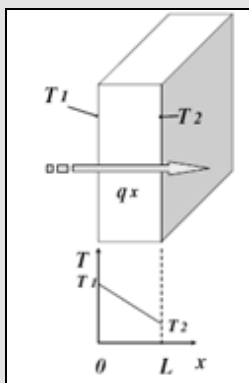
#### 3.1 ΜΟΡΦΕΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Η ύπαρξη θερμοκρασιακής διαφοράς μέσα σε ένα σώμα ή μεταξύ διαφορετικών σωμάτων που έρχονται σε επαφή ή αλληλεπιδρούν με οποιοδήποτε τρόπο χαρακτηρίζεται από μεταφορά ενέργειας. Η διαδικασία με την οποία η μεταφορά ενέργειας πραγματοποιείται λόγω θερμοκρασιακής διαφοράς είναι γνωστή ως μετάδοση θερμότητας. Η θερμότητα δε μπορεί να μετρηθεί άμεσα αλλά τα αποτελέσματα που παράγει είναι άμεσα μετρήσιμα. Οποιαδήποτε διαδικασία μετάδοσης θερμότητας εμπεριέχει τη μεταφορά και τη μετατροπή της ενέργειας και περιγράφεται από ένα συνδυασμό διαφορετικών ανεξάρτητων κανόνων της φυσικής επιστήμης.

Στη διεθνή βιβλιογραφία της περιοχής (Bennett and Myers 1962, Cengel 1997, Mills 1995, Kreith and Bohn 1993) αναφέρονται τρεις διακριτοί τρόποι μετάδοσης θερμότητας: με αγωγή, με συναγωγή και ακτινοβολία. Είναι άξιο επισήμανσης ότι η μετάδοση θερμότητας με αγωγή ή ακτινοβολία οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη θερμοκρασιακής διαφοράς ενώ κατά τη μετάδοση θερμότητας με συναγωγή μεταφέρεται θερμική ενέργεια και με τη μακροσκοπική κίνηση του ρευστού.

Η μετάδοση θερμότητας με αγωγή λαμβάνει χώρα όταν υπάρχει θερμοκρασιακή διαφορά μέσα σε ένα σώμα στερεό, υγρό ή αέριο, χωρίς να συνοδεύεται από αλλαγή φάσης καθώς και στην περίπτωση δύο σωμάτων που βρίσκονται σε απόλυτη επαφή χωρίς σχετική κίνηση. Στα στερεά σώματα, η μετάδοση της θερμότητας πραγματοποιείται είτε μέσω μοριακών ταλαντώσεων είτε μέσω ελεύθερων ηλεκτρονίων. Στα υγρά σώματα, η ύπαρξη δυνάμεων μεταξύ των μορίων τους επιδρά στην κίνησή τους και συνεπώς στη μετάδοση της θερμότητας. Στα αέρια σώματα, η κινητική ενέργεια των μορίων αυξάνεται όταν αυτά συγκρούονται με μόρια που προέρχονται από περιοχές υψηλότερης θερμοκρασίας του σώματος και έτσι επιτυγχάνεται η μετάδοση της θερμότητας. Στην περίπτωση των αερίων σωμάτων η μετάδοση της θερμότητας εξαρτάται και από την πίεση αφού αυτή επιδρά στην κινητικότητα των μορίων τους. Είναι φανερό ότι η μετάδοση θερμότητας με αγωγή στα υγρά και τα αέρια υφίσταται μόνο σε λεπτά στρώματα αυτών διότι σε παχύτερα στρώματα λαμβάνουν χώρα μακροσκοπικές κινήσεις των μορίων και ατόμων τους οπότε εμφανίζονται φαινόμενα συναγωγής.

Τα φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας χαρακτηρίζονται ανάλογα με το είδος των μεταβλητών που επιδρούν στη θερμοκρασία. Αν η θερμοκρασία είναι συνάρτηση του χρόνου τα φαινόμενα χαρακτηρίζονται ως μεταβατικά ή μη σταθερά ενώ αν η θερμοκρασία είναι ανεξάρτητη του χρόνου χαρακτηρίζονται ως μόνιμα ή σταθερά. Αν η θερμοκρασία είναι συνάρτηση μίας διάστασης του χώρου τα φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας χαρακτηρίζονται ως μονοδιάστατα, αν είναι συνάρτηση δύο διαστάσεων ως δισδιάστατα και τριών ως τρισδιάστατα.



**Σχήμα 3.1.1.** Μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας σε στερεό επίπεδο σώμα (<http://users.ntua.gr/xenophon/>)



Η γνωστή εξίσωση του Fourier, που περιγράφει τη θερμορροή που περνά ανά μονάδα χρόνου από τη στοιχειώδη επιφάνεια ισότροπου σώματος, σε στερεό επίπεδο σώμα στο οποίο λαμβάνει χώρα μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας παράλληλα προς τον άξονα x στη μονάδα του χρόνου (βλ. σχήμα 3.1.1) γράφεται ως εξής:

$$q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (3.1.1)$$

Η πυκνότητα παροχής θερμότητας  $q_x$  [W/m<sup>2</sup> ή kJ/m<sup>2</sup> h] είναι κάθετη στον άξονα x όπως και η επιφάνεια στην οποία λαμβάνει χώρα η μετάδοση της θερμότητας. Όπως είναι φανερό από την εξίσωση (3.1.1) η πυκνότητα παροχής της θερμότητας εξαρτάται από την κλίση της θερμοκρασίας και το συντελεστή  $\lambda$  [W/m K] που ονομάζεται ειδική θερμική αγωγιμότητα και προσδιορίζεται από τις ιδιότητες του σώματος. Το αρνητικό πρόσημο υποδεικνύει την αντίστροφη μεταβολή των δύο μεγεθών θερμοκρασίας  $T$  και μήκους x. Στην απλή περίπτωση η κατανομή της θερμοκρασίας στο επίπεδο σώμα είναι γραμμική. Η εξίσωση (3.1.1) γράφεται και ως ακολούθως:

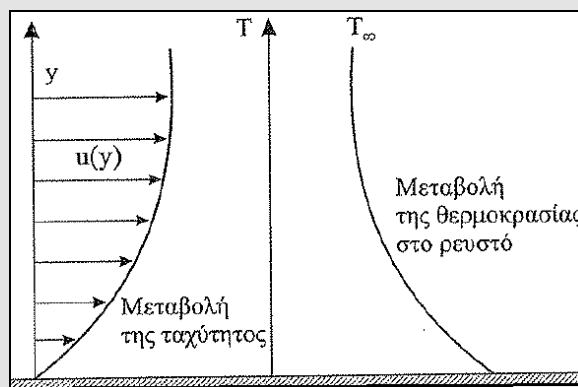
$$q_x = \lambda \frac{T_{S1} - T_{S2}}{L} = \lambda \frac{\Delta T}{L} \quad (3.1.2)$$

Οι θερμοκρασίες  $T_{S1}$  και  $T_{S2}$  αναφέρονται στις θέσεις 1, 2 του στερεού επίπεδου σώματος και  $L$  [m] είναι το πάχος αυτού.

Με δεδομένη την κάθετη επιφάνεια στην οποία λαμβάνει χώρα η μετάδοση της θερμότητας  $A$  [m<sup>2</sup>] το ρεύμα θερμότητας  $Q_x$  [W ή kJ/h] δίνεται από τη σχέση:

$$Q_x = A \cdot q_x \quad (3.1.3)$$

Μετάδοση θερμότητας με συναγωγή συμβαίνει μεταξύ της επιφάνειας ενός στερεού σώματος και ενός ρευστού (υγρού ή αέριου σώματος) που έρχονται σε επαφή και έχουν διαφορετική θερμοκρασία.



**Σχήμα 3.1.2.** Σχηματισμός οριακών στρωμάτων κατά τη μετάδοση θερμότητας με συναγωγή (Κακάτσιος 2006)

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1.2 δημιουργείται τόσο υδροδυναμικό οριακό στρώμα λόγω της μεταβολής της ταχυτητάς του ρευστού στην επιφάνεια του στερεού και σε μεγάλη απόσταση από αυτό όσο και θερμοκρασιακό οριακό στρώμα λόγω της μεταβολής της θερμοκρασίας του ρευστού στην επιφάνεια του στερεού και σε μεγάλη απόσταση από αυτό. Το πάχος του θερμοκρασιακού οριακού στρώματος μπορεί να είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο του υδροδυναμικού. Η μετάδοση θερμότητας

με συναγωγή είναι μεγαλύτερη κοντά στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων όπου η ταχύτητα του ρευστού είναι χαμηλή ενώ στα σημεία όπου η ταχύτητα του ρευστού μηδενίζεται η μετάδοση της θερμότητας γίνεται με αγωγή. Όταν η κίνηση του ρευστού οφείλεται σε εξωτερικά αίτια, π.χ. έναν ανεμιστήρα, η συναγωγή χαρακτηρίζεται ως εξαναγκασμένη ενώ, όταν οφείλεται σε διαφορές πυκνοτήτων μέσα στο ρευστό λόγω θερμοκρασιακών διαφορών, π.χ. ο αέρας ενός δωματίου στο οποίο λειτουργεί ένα θερμαντικό σώμα, χαρακτηρίζεται ως ελεύθερη. Τα παραπάνω παραδείγματα περιγράφουν μεταφορά αισθητής θερμότητας μέσω του μηχανισμού της συναγωγής. Μετάδοση θερμότητας με συναγωγή εμφανίζεται και κατά την αλλαγή φάσης ενός ρευστού. Το φαινόμενο αυτό χαρακτηρίζεται από τη μεταφορά λανθάνουσας θερμότητας.

Χαρακτηριστική σχέση για τον υπολογισμό της πυκνότητας παροχής θερμότητας  $q$  [ $W/m^2$  ή  $kJ/m^2 h$ ] με συναγωγή είναι η σχέση Newton:

$$q = h(T_s - T_\infty) \quad (3.1.4)$$

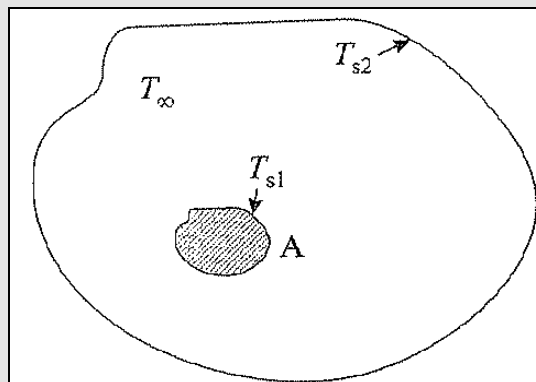
Η πυκνότητα παροχής θερμότητας είναι ανάλογη της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ της επιφάνειας του στερεού σώματος  $T_s$  και του ρευστού σώματος σε σημείο στο οποίο δεν επηρεάζεται πλέον από τη θερμοκρασία του στερεού  $T_\infty$ . Ο συντελεστής  $h$  [ $W/m^2 K$ ] ονομάζεται ειδική συναγωγιμότητα και εξαρτάται από τη γεωμετρία της επιφάνειας, το είδος του ρευστού και της ροής του. Η ειδική συναγωγιμότητα είναι συνάρτηση της ειδικής θερμικής αγωγιμότητας, της ταχύτητας, του δυναμικού ιξώδους, της πυκνότητας και της ειδικής θερμοχωρητικότητας υπό σταθερή πίεση του ρευστού καθώς και των γεωμετρικών συνθηκών.

Η μετάδοση θερμότητας με ακτινοβολία γίνεται μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Βασίζεται στην ικανότητα αρκετών σωμάτων να απορροφούν μέρος της ακτινοβολίας που δέχονται και να την επανεκπέμπουν. Σε αντίθεση με τους προαναφερθέντες τρόπους μετάδοσης θερμότητας με αγωγή και συναγωγή στην ακτινοβολία δεν απαιτείται η ύπαρξη υλικού μέσου για να πραγματοποιηθεί η μετάδοση θερμότητας η οποία ενισχύεται στο κενό.

Η πυκνότητα παροχής θερμότητας  $q$  [ $W/m^2$  ή  $kJ/m^2 h$ ] που ακτινοβολείται από ένα σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$q = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (3.1.5)$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ο συντελεστής εκπομπής του σώματος που κυμαίνεται από 0 έως 1,  $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8}$  [ $W/m^2 K^4$ ] η σταθερά Stefan-Boltzmann και  $T_s$  [ $K$ ] η θερμοκρασία του σώματος.



**Σχήμα 3.1.3.** Μετάδοση θερμότητας μεταξύ δύο σωμάτων όπου το ένα περιβάλλει το άλλο με συναγωγή και ακτινοβολία (Κακάτσιος 2006)

Μία συνήθης περίπτωση μετάδοσης θερμότητας με ακτινοβολία απεικονίζεται στο σχήμα 3.1.3 όπου ένα μικρό στερεό σώμα ακτινοβολεί θερμότητα σε ένα μεγαλύτερο στερεό σώμα που το περιβάλλει ενώ ο μεταξύ τους χώρος καταλαμβάνεται από ένα αέριο. Το ολικό ρεύμα θερμότητας  $Q$  [W ή kJ/h] υπολογίζεται ως το άθροισμα της μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή από το μικρό στερεό σώμα θερμοκρασίας  $T_{S1}$  στο αέριο με θερμοκρασία  $T_{\infty}$  και της μετάδοσης θερμότητας με ακτινοβολία από το μικρό στερεό σώμα θερμοκρασίας  $T_{S1}$  στο μεγάλο θερμοκρασίας  $T_{S2}$ .

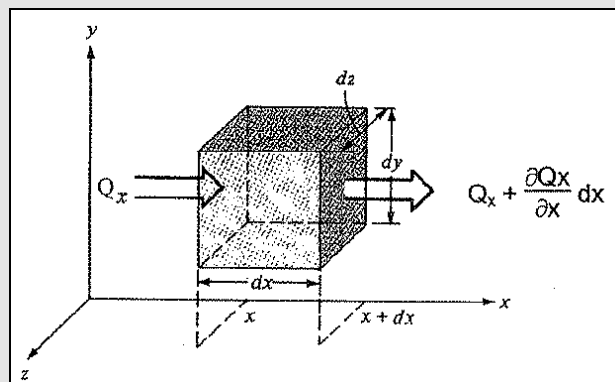
$$Q = Q_{\text{conv}} + Q_{\text{rad}} = hA(T_{S1} - T_{\infty}) + \varepsilon A\sigma(T_{S1}^4 - T_{S2}^4) \quad (3.1.6)$$

### 3.2 ΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στην παρούσα ενότητα θα μελετηθεί η αγωγή θερμότητας σε στερεό σώμα. Η εξίσωση της αγωγής είναι μία μαθηματική έκφραση της διατήρησης της ενέργειας στο υπό μελέτη στερεό σώμα. Για τον προσδιορισμό αυτής της εξίσωσης πραγματοποιείται ενεργειακός ισολογισμός σε ένα στοιχειώδη όγκο του υλικού όπου η μετάδοση της θερμότητας γίνεται μόνο με αγωγή (Ρουλικακός 1994).

#### 3.2.1 Αγωγή θερμότητας μέσω επίπεδου σώματος

Θεωρείται ο στοιχειώδης όγκος ελέγχου του υπό μελέτη στερεού επίπεδου σώματος του σχήματος 3.2.1.



**Σχήμα 3.2.1.** Τρισδιάστατη μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε καρτεσιανές συντεταγμένες για στοιχειώδη όγκο ελέγχου (Κακάτσιος 2006)

Για το στοιχειώδη αυτόν όγκο ισχύει ότι το άθροισμα του ρυθμού της εισερχόμενης αγωγής θερμότητας και του ρυθμού παραγωγής ενέργειας μέσα στον όγκο ισούται με το άθροισμα της εξερχόμενης αγωγής θερμότητας και του ρυθμού αποθήκευσης ενέργειας μέσα στον όγκο. Αν υφίσταται παραγωγή ενέργειας μέσα στον όγκο, αυτή προέρχεται είτε από χημικές αντιδράσεις, είτε από ηλεκτρικά ρεύματα που διαπερνούν το υλικό είτε από πυρηνικές αντιδράσεις. Ο ρυθμός αποθήκευσης ενέργειας μέσα στον όγκο εκφράζεται με τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας. Στην περίπτωση αύξησης της εσωτερικής ενέργειας του όγκου αυτή γίνεται αντιληπτή με την αύξηση της θερμοκρασίας του. Ορίζοντας το σύμβολο  $\Phi$  [W/m<sup>3</sup>] ως το ρυθμό παραγωγής θερμότητας μέσα στον όγκο και γράφοντας με μαθηματικά σύμβολα το ενεργειακό ισοζύγιο που περιγράφηκε παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση.

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\Phi}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{όπου} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (3.2.1.1)$$

Επισημαίνεται ότι οι ρυθμοί της αγωγής έχουν εκφραστεί με το νόμο του Fourier και οι τρεις πρώτοι όροι της εξίσωσης (3.2.1.1) εκφράζουν το καθαρό ποσό θερμότητας που μεταδίδεται στον στοιχειώδη όγκο στις τρεις διαστάσεις δηλαδή τη διαφορά του ρυθμού εισερχόμενης και εξερχόμενης αγωγής θερμότητας.

Η θερμοκρασιακή αγωγιμότητα  $\alpha$  [ $m^2/s$ ] εκφράζει τις ιδιότητες του υλικού του στερεού μέσου. Αυτό είναι προφανές και από τον ορισμό της αφού ορίζεται ως συνάρτηση της ειδικής θερμικής αγωγιμότητας  $\lambda$  [ $W/m K$ ], της πυκνότητας  $\rho$  [ $kg/m^3$ ] και της ειδικής θερμοχωρητικότητας  $c_p$  [ $kJ/kg K$ ].

Στην περίπτωση επίπεδου στερεού σώματος όπου λαμβάνει χώρα μόνιμη και μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας με αγωγή στον άξονα  $x$  η διαφορική εξίσωση (3.2.1.1) γράφεται ως εξής:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \frac{1}{\lambda} \Phi(x) = 0 \quad (3.2.1.2)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.2.1.2) είναι:

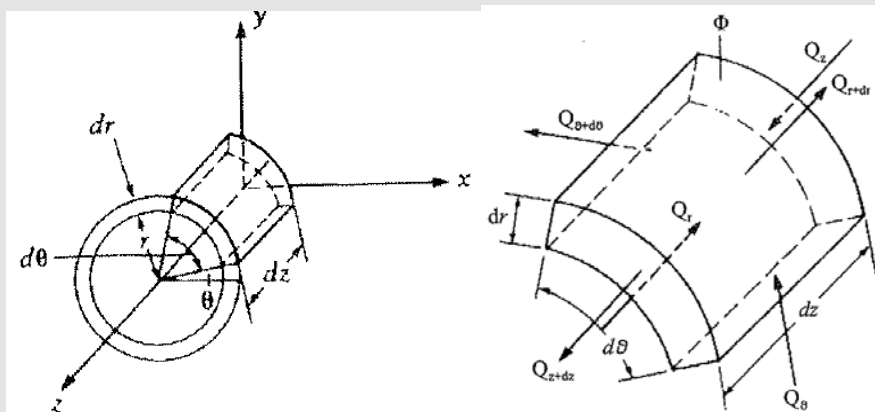
$$T(x) = -\frac{\Phi}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (3.2.1.3)$$

και οι σταθερές  $C_1$ ,  $C_2$  προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

### 3.2.2 Αγωγή θερμότητας μέσω κυλινδρικού σώματος

Θεωρώντας ένα κυλινδρικό στερεό σώμα (βλ. σχήμα 3.2.2) ο ενεργειακός ισολογισμός του στοιχειώδους όγκου ελέγχου, σε αντιστοιχία με αυτόν που περιγράφηκε στην ενότητα 3.2.1, γράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\Phi}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.2.2.1)$$



**Σχήμα 3.2.2.** Τρισδιάστατη μετάδοση θερμότητας με αγωγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες για στοιχειώδη όγκο ελέγχου (Κακάτσιος 2006)

Στην περίπτωση κυλινδρικού στερεού σώματος όπου λαμβάνει χώρα μόνιμη και μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας με αγωγή στην ακτινική διεύθυνση  $r$  η διαφορική εξίσωση (3.2.2.1) γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{\lambda} \Phi(r) = 0 \quad (3.2.2.2)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.2.2.2) είναι:

$$T(r) = -\frac{\Phi}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.2.2.3)$$

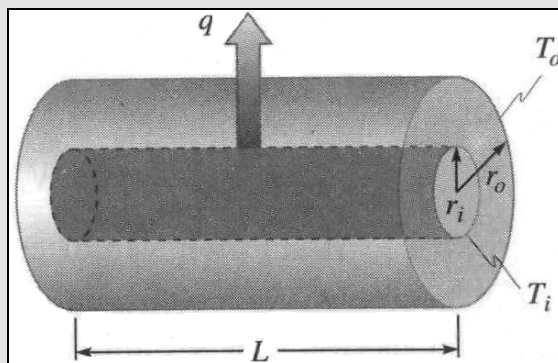
και οι σταθερές  $C_1, C_2$  προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος.

Όπως είναι γνωστό τα κυλινδρικά σώματα χωρίζονται σε συμπαγή π.χ. ράβδοι και κοίλα π.χ. σωλήνες. Ανάλογα με το διαχωρισμό αυτό διαφοροποιούνται και οι οριακές συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες προσδιορίζονται οι ζητούμενες σταθερές  $C_1$  και  $C_2$ .

Για συμπαγές κυλινδρικό σώμα η μία οριακή συνθήκη αναφέρεται στην εξωτερική επιφάνεια του σώματος και η άλλη στον άξονά του.

Για κοίλο κυλινδρικό σώμα η μία οριακή συνθήκη αναφέρεται στην εξωτερική και η άλλη στην εσωτερική επιφάνεια του σώματος. Επίσης, ως οριακές συνθήκες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αν είναι γνωστές η πυκνότητα παροχής θερμότητας και η συναγωγή θερμότητας μεταξύ του ρευστού και στερεού μέσου. Στην περίπτωση κοίλου κυλινδρικού σώματος όπου συμβαίνει μόνιμη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας με αγωγή στην ακτινική διεύθυνση, χωρίς να συνοδεύεται από παραγωγή ενέργειας (βλ. σχήμα 3.2.3) η εξίσωση (3.2.2.2) γράφεται ως εξής:

$$\frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] = 0 \quad \text{με οριακές συνθήκες } r = r_i : T(r) = T_i \text{ και } r = r_o : T(r) = T_o \quad (3.2.2.4)$$



**Σχήμα 3.2.3.** Μονοδιάστατη αγωγή θερμότητας σε στερεό κοίλο κυλινδρικό σώμα (Kreith and Bohn 1993)

Θεωρείται ότι το προαναφερθέν σώμα έχει μήκος  $L$  και σταθερή ειδική θερμική αγωγιμότητα  $\lambda$  οπότε το ρεύμα θερμότητας  $Q$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q = q(r) \cdot A = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} (T_i - T_o) \quad (3.2.2.5)$$

Η εξίσωση (3.2.2.5) γράφεται και ως εξής:

$$Q = \frac{T_o - T_i}{R} \quad \text{όπου} \quad R = \frac{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}{2\pi\lambda L} \quad (3.2.2.6)$$

Ο συντελεστής  $R$  [m K/W] ορίζεται ως η θερμική αντίσταση αγωγής του κυλινδρικού σώματος.

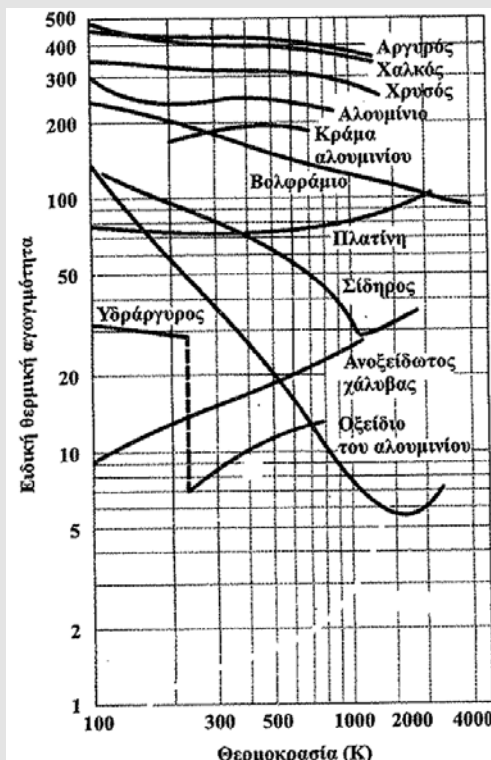
### 3.2.3 Συντελεστής ειδικής θερμικής αγωγιμότητας υλικού

Ο συντελεστής ειδικής θερμικής αγωγιμότητας  $\lambda$  [W/m K] έχει ήδη αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες. Αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα του υλικού του σώματος και ορίζεται μέσω της σχέσης του Fourier ως:

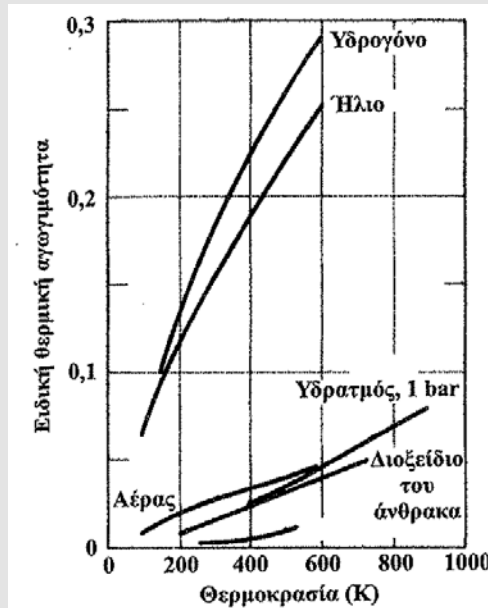
$$\lambda \equiv -\frac{q}{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)} \quad (3.2.3.1)$$

Ο συντελεστής  $\lambda$  (Πασπαλάς 2008) αποτελεί δείκτη της ταχύτητας μετάδοσης της θερμότητας με αγωγή μέσω της μάζας ενός σώματος. Οι τιμές αυτού του συντελεστή προσδιορίζονται συνήθως πειραματικά και εξαρτώνται από τις ιδιότητες του υλικού, την εσωτερική του δομή και τις συνθήκες διεξαγωγής των πειραμάτων. Η ύπαρξη κρυσταλλικής δομής στα στερεά τα καθιστά περισσότερο θερμικά αγωγίμα από τα ρευστά που είναι άμορφα και έχουν ακανόνιστη διάταξη ατόμων. Τα μέταλλα έχουν υψηλή συγκέντρωση ελεύθερων ηλεκτρονίων ενώ τα αμέταλλα χαμηλή. Η υψηλή αυτή συγκέντρωση είναι ένδειξη ότι μεταφέρουν πιο εύκολα τη θερμότητα σε σχέση με σώματα χαμηλότερης συγκέντρωσης ελεύθερων ηλεκτρονίων και γι' αυτό χαρακτηρίζονται ως αγωγοί θερμότητας ή αγωγοί.

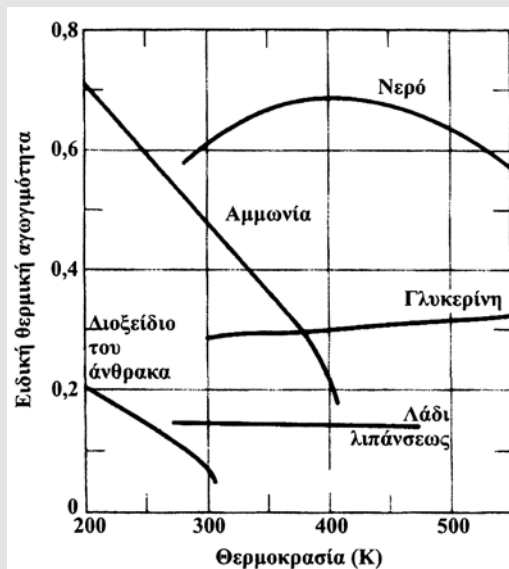
Η αύξηση της θερμοκρασίας στα περισσότερα μέταλλα οδηγεί σε μείωση της ειδικής θερμικής τους αγωγιμότητας (βλ. σχήμα 3.2.4). Στα αέρια η ειδική θερμική αγωγιμότητα αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας (βλ. σχήμα 3.2.5). Στο σχήμα 3.2.6 φαίνεται η μεταβολή της τιμής του συντελεστή  $\lambda$  σε γνωστά μη μεταλλικά υγρά.



**Σχήμα 3.2.4.** Ειδική θερμική αγωγιμότητα στερεών σωμάτων σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.2.5.** Ειδική θερμική αγωγιμότητα αερίων σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία σε στάθερη πίεση 1 bar (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.2.6.** Ειδική θερμική αγωγιμότητα μη μεταλλικών υγρών σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία (Κακάτσιος 2006)

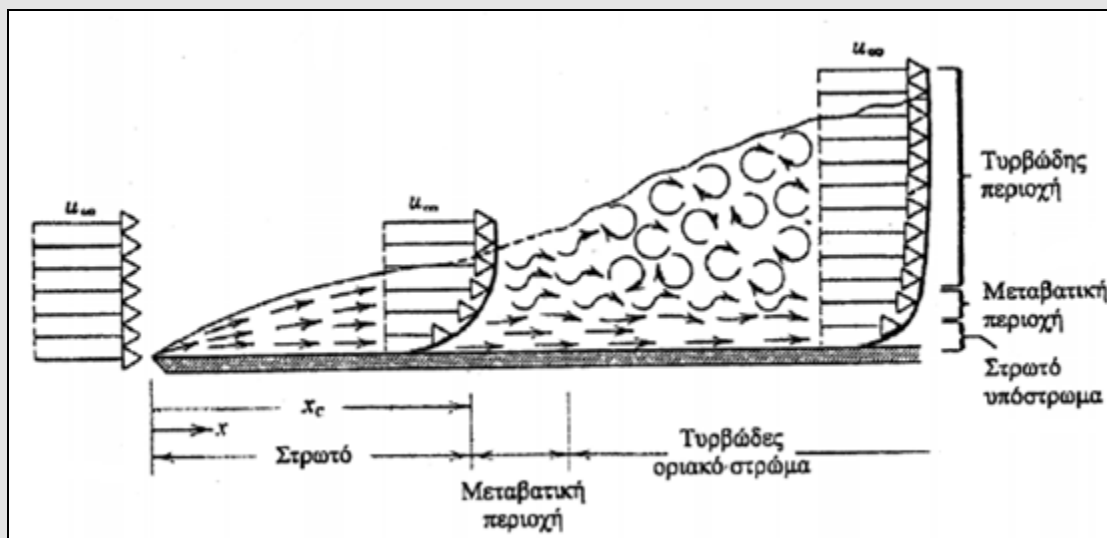
Μονωτικά υλικά χαρακτηρίζονται αυτά που έχουν ιδιαίτερα χαμηλή τιμή του συντελεστή  $\lambda$  (π.χ. υαλοβάμβακας με τιμή  $\lambda = 0,026 - 0,029 \text{ W/m K}$ ). Συνήθως φέρουν στη μάζα τους πόρους ή εγκλείσματα που περιέχουν αέρα. Η μετάδοση της θερμότητας μέσω αυτών των υλικών γίνεται με αγωγή και συναγωγή και στην περίπτωση πολύ υψηλών θερμοκρασιών και με ακτινοβολία. Η υγρασία μειώνει σημαντικά τη μονωτική τους ικανότητα καθώς μέρος της ποσότητας του αέρα που περιέχουν αντικαθίσταται με νερό που έχει πολύ χειρότερες μονωτικές ιδιότητες από τον αέρα.

### 3.3 ΣΥΝΑΓΩΓΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στην παρούσα ενότητα θα μελετηθεί η συναγωγή θερμότητας μεταξύ στερεού σώματος και ρευστού. Το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα σύνθετο καθώς για τον υπολογισμό των μεγεθών ενδιαφέροντος όπως η πυκνότητα παροχής της θερμότητας, το ρεύμα θερμότητας κ.α. πρέπει να είναι γνωστή τόσο η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού όσο και η κατανομή της θερμοκρασίας στην περιοχή όπου λαμβάνουν χώρα τα φαινόμενα μετάδοσης θερμότητας.

#### 3.3.1 Εξίσωση συναγωγής θερμότητας

Όπως έχει αναφερθεί στην ενότητα 3.1 η συναγωγή διακρίνεται σε εξαναγκασμένη και ελεύθερη. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό το φαινόμενο της συναγωγής μελετάται ροή ρευστού θερμοκρασίας  $T_\infty$ , παράλληλη προς επίπεδη επιφάνεια εμβαδού  $A$  και θερμοκρασίας  $T_S$ , με  $T_S > T_\infty$ . Καθώς το ρευστό έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια η ροή επιβραδύνεται λόγω της ανάπτυξης διατμητικών δυνάμεων.



**Σχήμα 3.3.1.** Υδροδυναμικό οριακό στρώμα σε στερεή επίπεδη επιφάνεια (Κακάτσιος 2006)

Το προφίλ της ταχύτητάς του ρευστού (Κακάτσιος 2006, Στέγγου 2010) μεταβάλλεται ασυμπτωτικά από την τιμή μηδέν πάνω στην επιφάνεια μέχρι την τιμή της αδιατάρακτης ταχύτητας ή με άλλα λόγια ταχύτητας ελεύθερης ροής  $u_\infty$  που είχε πριν την επαφή του με το επίπεδο στερεό (βλ. σχήμα 3.3.1). Η κάθετη απόσταση από την επίπεδη επιφάνεια στην οποία η ταχύτητα του ρευστού θα λάβει την αδιατάρακτη τιμή  $u_\infty$  είναι ένα χαρακτηριστικό μέγεθος και διαστασιολογεί το πάχος του υδροδυναμικού οριακού στρώματος. Το πάχος του υδροδυναμικού οριακού στρώματος ή αλλιώς της υδροδυναμικής οριακής στοιβάδας είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του επίπεδου στερεού σώματος. Η ροή, σε κάθετη απόσταση από την επίπεδη επιφάνεια μεγαλύτερη από το πάχος υδροδυναμικού οριακού στρώματος, χαρακτηρίζεται ως εξωτερική ροή και η επίδραση που δέχεται από τις διατμητικές δυνάμεις είναι αμελητέα. Ακόμα, παρατηρείται σταδιακή αύξηση του πάχους του υδροδυναμικού οριακού στρώματος κατά μήκος της επίπεδης επιφάνειας όπου στο τέλος του μήκους της λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του (βλ. σχήμα 3.3.1). Η αύξηση των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια μεταβάλλει το είδος της ροής του ρευστού. Διακρίνονται τρεις μορφές ροής η στρωτή, η μεταβατική και η τυρβώδης. Στην στρωτή ροή η κίνηση του ρευστού γίνεται σε λεία στρώματα χωρίς μεταξύ τους

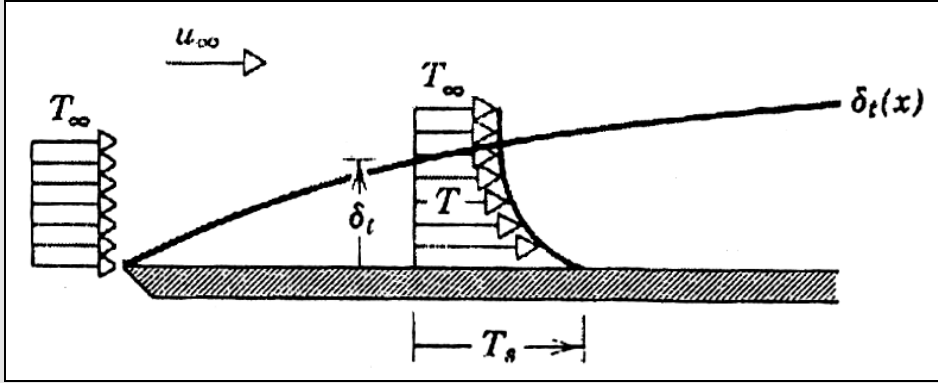


ανάμειξη και γι' αυτό οι γραμμές ροής είναι τακτοποιημένες. Η ταχύτητα και η πίεση είναι χρονικά αμετάβλητες σε κάθε σημείο της ροής, στη μόνιμη κατάσταση. Το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται σε αυτήν τη φάση ονομάζεται στρωτό. Βαθμιαία η ροή εμφανίζει διακυμάνσεις μέχρι τη στιγμή που θα γίνει τυρβώδης. Η περιοχή της ροής ανάμεσα στη στρωτή και την τυρβώδη ονομάζεται μεταβατική. Στην τυρβώδη ροή η κίνηση του ρευστού είναι ακανόνιστη και χαρακτηρίζεται από έντονα φαινόμενα ανάμειξης. Η ταχύτητα και η πίεση δεν είναι χρονικά σταθερές σε ένα σημείο του πεδίου ροής αλλά παρουσιάζουν τυχαίες διακυμάνσεις. Το οριακό στρώμα που αναπτύσσεται σε αυτήν την φάση ονομάζεται τυρβώδες. Ο υπολογισμός της απόστασης  $x_c$  από το άκρο της επίπεδης επιφάνειας όπου εμφανίζεται η αλλαγή της μορφής της ροής από στρωτή σε τυρβώδη υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Re_{xc} = \frac{\rho u_{\infty} x_c}{\mu} \tag{3.3.1.1}$$

Ο αριθμός Reynolds  $Re$  εξαρτάται από τις ιδιότητες του ρευστού και την ποιότητα της επιφάνειας. Σε ροή παράλληλη προς επίπεδη επιφάνεια όπως αυτή που μελετάται στην παρούσα ενότητα ο αριθμός Reynolds είναι δυνατόν να μεταβάλλεται από  $10^5$  έως  $3 \cdot 10^6$ , ενώ μία αντιπροσωπευτική τιμή θα ήταν η  $5 \cdot 10^5$ . Το δυναμικό ιξώδες  $\mu$  αποτελεί χαρακτηριστική φυσική ιδιότητα του ρευστού και καθορίζει εάν είναι λεπτόρευστο ή παχύρευστο.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3.1 η τυρβώδης περιοχή διακρίνεται σε τρεις υποπεριοχές. Η πρώτη είναι το στρωτό υπόστρωμα στο οποίο κυριαρχεί η μετάδοση θερμότητας με αγωγή και η κατανομή της ταχύτητας είναι σχεδόν γραμμική. Στη δεύτερη συνυπάρχουν ταυτόχρονα η αγωγή και η τυρβώδης ανάμειξη. Η τρίτη ονομάζεται τυρβώδης και σε αυτή λαμβάνει χώρα μόνο τυρβώδης ανάμειξη.



**Σχήμα 3.3.2.** Θερμικό οριακό στρώμα σε στερεή επίπεδη επιφάνεια (Κακάτσιος 2006)

Εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας ρευστού με την επίπεδη επιφάνεια εκτός από το υδροδυναμικό οριακό στρώμα αναπτύσσεται και θερμοκρασιακό πεδίο ή αλλιώς θερμικό οριακό στρώμα με αντίστοιχο μηχανισμό (βλ. σχήμα 3.3.2). Η θερμοκρασία από την τιμή  $T_s$  πάνω στην επίπεδη επιφάνεια μεταβάλλεται ασυμπτωτικά μέχρι την τιμή  $T_{\infty}$  η οποία είναι η αδιατάρακτη θερμοκρασία του ρευστού. Ομοίως το πάχος του θερμικού οριακού στρώματος ή της θερμικής οριακής στοιβάδας είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις διαστάσεις του επίπεδου στερεού σώματος. Στο θερμικό οριακό στρώμα η μετάδοση της θερμότητας εξαρτάται τόσο από το πάχος του όσο και από το πάχος του υδροδυναμικού οριακού στρώματος στην ίδια θέση.

Το πάχος των οριακών στρωμάτων εξαρτάται από τον αριθμό Prandtl Pr ο οποίος υπολογίζεται ως εξής:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.3.1.2)$$

Το κινηματικό ιξώδες  $\nu$  [m<sup>2</sup>/s] ορίζεται ως ο λόγος του δυναμικού ιξώδους προς την πυκνότητα του ρευστού.

Όταν ο αριθμός Prandtl είναι μεγαλύτερος της μονάδας το πάχος του θερμικού οριακού στρώματος είναι μικρότερο του αντίστοιχου υδροδυναμικού σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Το αντίθετο ισχύει όταν ο αριθμός Prandtl είναι μικρότερος της μονάδας. Όταν ο αριθμός Prandtl ισούται με τη μονάδα τα δύο οριακά στρώματα έχουν το ίδιο πάχος. Για τα διάφορα ρευστά οι τιμές του αριθμού Prandtl κυμαίνονται από 10<sup>4</sup> έως 10<sup>-3</sup>. Τα έλαια χαρακτηρίζονται από μεγάλους αριθμούς Prandtl, τα αέρια και το νερό από μεσαίους ενώ τα υγρά μέταλλα από πολύ μικρούς.

Με βάση τη σχέση του Newton που αναφέρθηκε στην ενότητα 3.1 (σχήμα 3.1.4) το ρεύμα θερμότητας για την περίπτωση που μελετάται θα υπολογιστεί ως εξής:

$$Q = Ah_m(T_s - T_\infty) \quad (3.3.1.3)$$

Ο συντελεστής  $h_m$  [W/m<sup>2</sup> K] ονομάζεται μέση ειδική συναγωγιμότητα και αποτελεί μία μέση τιμή των τοπικών τιμών ειδικής συναγωγιμότητας κατά μήκος της επίπεδης επιφάνειας που έρχεται σε επαφή με το ρευστό.

Μία αδιάστατη έκφραση της ειδικής συναγωγιμότητας  $h$  [W/m<sup>2</sup> K] είναι ο αριθμός Nusselt  $Nu$  που ορίζεται ως ακολούθως:

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} = \frac{q}{\lambda \cdot \Delta T} \quad \text{όπου} \quad q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T_s - T_\infty) \quad (3.3.1.4)$$

όπου  $L$  [m] μία χαρακτηριστική διάσταση και στην εξεταζόμενη περίπτωση το μήκος της επίπεδης πλάκας. Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι ο αριθμός Nusselt (Πασπαλάς 2008) εκφράζει την αδιάστατη αρνητική κλίση της θερμοκρασίας. Στην μελέτη της εξαναγκασμένης συναγωγής ασυμπίεστης ροής το θερμικό οριακό στρώμα εξαρτάται μόνο από τους αριθμούς Re και Pr και άρα ο αριθμός Nu είναι συνάρτηση μόνο αυτών. Σε αντιστοιχία με τη μέση ειδική συναγωγιμότητα ορίζεται και ο μέσος αριθμός Nusselt  $Nu_m$ .

Στην μελέτη της ελεύθερης συναγωγής η ροή του ρευστού οφείλεται στην ύπαρξη διαφορών πυκνότητας οι οποίες δημιουργούνται από τις θερμοκρασιακές διαφορές. Για την περιγραφή του φαινομένου ορίζεται ο αριθμός Grashof Gr ως ο λόγος της άνωσης προς τις δυνάμεις συνεκτικότητας και αντικαθιστά τον αριθμό Reynolds Re. Η ελεύθερη συναγωγή εξαρτάται μόνο από τους αριθμούς Prandtl Pr και Grashof Gr και άρα ο μέσος Nusselt υπολογίζεται ως συνάρτηση αυτών. Διεξάγοντας πειράματα πολλοί ερευνητές προσδιόρισαν αριθμητικές σχέσεις για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού Nusselt σε διάφορες περιπτώσεις ελεύθερης συναγωγής. Ενδεικτικά αναφέρονται οι προσεγγίσεις του McAdams για δύο περιπτώσεις.

Στην πρώτη περίπτωση του επίπεδου κατακόρυφου σώματος σταθερής θερμοκρασίας  $T_s$  που εκτίθεται σε στρωτή, τυρβώδη ροή προτείνεται η ακόλουθη σχέση:

$$Nu_m = C[Gr_L Pr]^n = C Ra_L^n \quad \text{με θερμοκρασία αναφοράς} \quad T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} \quad (3.3.1.5)$$

Οι τιμές των  $C$  και  $n$  δίνονται στον πίνακα 3.3.1 και  $L$  είναι το ύψος του κατακόρυφου σώματος.

**Πίνακας 3.3.1.** Σταθερές της εξίσωσης (3.3.1.5) (Κακάτσιος 2006)

Ροή	$(Gr_L Pr) = Ra_L$	$C$	$n$
Στρωτή	$10^4 \div 10^9$	0,59	1/4
Τυρβώδης	$10^9 \div 10^{13}$	0,10	1/3

Στη δεύτερη περίπτωση του οριζόντιου σώματος σταθερής θερμοκρασίας  $T_s$  που εκτίθεται σε στρωτή, τυρβώδη ροή προτείνεται η ακόλουθη σχέση:

$$Nu_m = C[Gr_L Pr]^n \quad \text{όπου} \quad Nu_m = \frac{h_m L}{\lambda} \quad \text{και} \quad Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (3.3.1.6)$$

όπου  $g$  [ $m/s^2$ ] είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας και  $\beta$  [ $K^{-1}$ ] η ισόθλιπη διαστολικότητα.

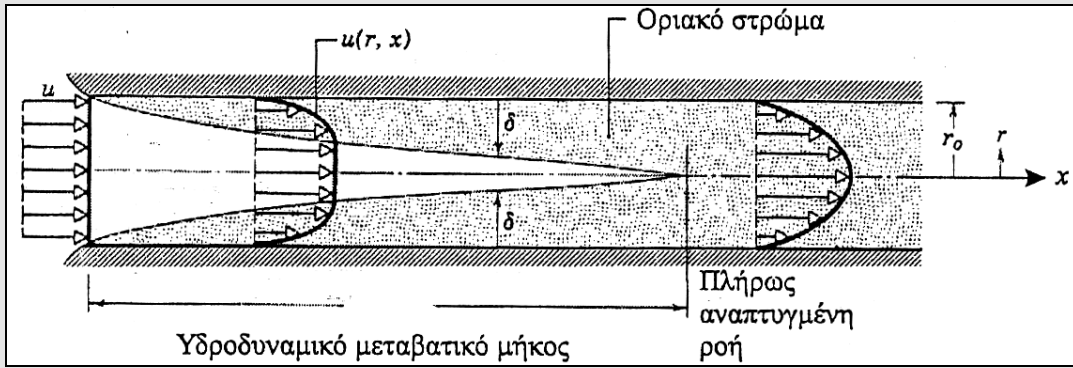
Οι τιμές των  $C$  και  $n$  δίνονται στον πίνακα 3.3.2 και  $L$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος του επίπεδου σώματος. Για τετραγωνικό σώμα το χαρακτηριστικό μήκος είναι η μία του πλευρά, για ορθογωνικό είναι ο αριθμητικός μέσος των δύο διαστάσεων και για κυκλικό δίσκο 0,9 φορές η διάμετρος του. Επίσης, ως χαρακτηριστικό μήκος μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας του οριζοντίου σώματος προς την περίμετρο αυτού.

**Πίνακας 3.3.2.** Σταθερές της εξίσωσης (3.3.1.6) (Κακάτσιος 2006)

Θέση επιφάνειας επιπέδου σώματος	Ροή	$Gr_L Pr$	$C$	$n$
Θερμή επιφάνεια προς τα κάτω ή ψυχρή επιφάνεια προς τα επάνω	Στρωτή	$3 \times 10^5 \div 3 \times 10^{10}$	0,27	1/4
Θερμή επιφάνεια προς τα επάνω ή ψυχρή επιφάνεια προς τα κάτω	Στρωτή	$10^5 \div 2 \times 10^7$	0,54	1/4
	Τυρβώδης	$2 \times 10^7 \div 3 \times 10^{10}$	0,14	1/3

### 3.3.2 Συντελεστής συναγωγιμότητας ρευστού-αριθμός Nusselt

Στην παρούσα ενότητα θεωρείται ως μελέτη περίπτωσης η εξαναγκασμένη ροή ρευστού στο εσωτερικό αγωγού κυκλικής διατομής. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.3.3 ο αγωγός έχει εσωτερική ακτίνα  $r_o$  και το ρευστό εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα  $u$  κάθετα στην διατομή του. Το τοίχωμα του αγωγού έχει σταθερή θερμοκρασία  $T_s$  μικρότερη της θερμοκρασίας του ρευστού πριν από την είσοδό του στον αγωγό.



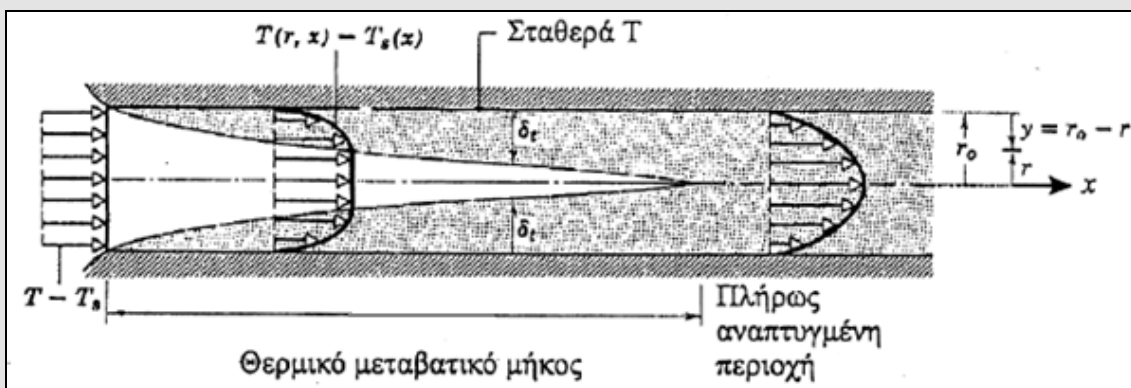
**Σχήμα 3.3.3.** Υδροδυναμικό οριακό στρώμα στρωτής ροής στο εσωτερικό αγωγού (Κακάτσιος 2006)

Με την είσοδο του ρευστού στον αγωγό το προφίλ της ταχύτητας του μεταβάλλεται. Αναπτύσσεται υδροδυναμικό οριακό στρώμα το πάχος του οποίου αυξάνεται με την αύξηση της απόστασης από το άκρο του αγωγού. Μετά από ένα χαρακτηριστικό μήκος, το λεγόμενο υδροδυναμικό μεταβατικό μήκος, η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού μέσα στον αγωγό είναι παραβολική και η στρωτή ροή θεωρείται πλήρως ανεπτυγμένη υδροδυναμικά. Ο αριθμός  $Re$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Re = \frac{u_m D}{\nu} \quad (3.3.2.1)$$

όπου  $u_m$  [m/s] η μέση ταχύτητα του ρευστού μέσα στον αγωγό και  $D$  η εσωτερική διάμετρος του αγωγού. Για  $Re < 2300$  η ροή χαρακτηρίζεται στρωτή ενώ για  $Re > 2300$  τυρβώδης. Για  $2000 < Re < 4000$  η ροή θεωρείται ότι μεταβαίνει από στρωτή σε τυρβώδη φάση. Αξίζει να επισημανθεί ότι η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού μέσα στον αγωγό στην πλήρως ανεπτυγμένη υδροδυναμικά φάση δεν είναι παραβολική όταν η ροή είναι τυρβώδης, αλλά έχει μία κατανομή με λιγότερο απότομες μεταβολές. Επίσης, το μήκος του υδροδυναμικού μεταβατικού μήκους εξαρτάται από τη διαμόρφωση της εισόδου του αγωγού.

Αντίστοιχα με την ανάπτυξη του υδροδυναμικού οριακού στρώματος αναπτύσσεται και το θερμικό οριακό στρώμα (βλ. σχήμα 3.3.4).



**Σχήμα 3.3.4.** Θερμικό οριακό στρώμα στρωτής ροής στο εσωτερικό αγωγού (Κακάτσιος 2006)

Όταν η θερμοκρασία του τοιχώματος του αγωγού θεωρείται σταθερή ο αριθμός Nusselt που υπολογίζεται από τη σχέση (3.3.2.2) είναι σταθερός και ίσος με 3,6568 για στρωτή ροή.

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad (3.3.2.2)$$

Το ρεύμα θερμότητας που μεταδίδεται με συναγωγή στην περίπτωση σταθερής θερμοκρασίας τοιχώματος αγωγού δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\begin{aligned} Q &= \dot{m}c_p [T_{m,o} - T_{m,i}] = \dot{m}c_p [(T_s - T_{m,i}) - (T_s - T_{m,o})] = \\ &= \dot{m}c_p (\Delta T_i - \Delta T_o) = h_m A_S \left[ \frac{\Delta T_o - \Delta T_i}{\infty_n \left( \frac{\Delta T_o}{\Delta T_i} \right)} \right] = h_m A_S \Delta T_m \end{aligned} \quad (3.3.2.3)$$

όπου  $T_{m,i}$  η μέση θερμοκρασία εισόδου του ρευστού και  $T_{m,o}$  η μέση θερμοκρασία εξόδου.

Η μαθηματική έκφραση στην αγκύλη είναι γνωστή ως μέση λογαριθμική θερμοκρασιακή διαφορά.

Στην περίπτωση τυρβώδους, πλήρους αναπτυσσόμενης ροής στο εσωτερικό λείου αγωγού κυκλικής διατομής ο αριθμός Nusselt υπολογίζεται από την εξίσωση Colburn:

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3} \quad (3.3.2.4)$$

Η εξίσωση (3.3.2.4) δίνει καλύτερα αποτελέσματα για  $0,7 < Pr < 160$ ,  $10000 < Re$  και  $60 < \frac{L}{D}$ .

Μία άλλη μαθηματική έκφραση υπολογισμού του αριθμού Nusselt για τις ίδιες συνθήκες δίνεται από τη σχέση Dittus-Boelter:

$$\begin{aligned} Nu &= 0,023 Re^{0,8} Pr^n \quad \text{όπου} \\ n &= 0,4 \text{ όταν } T_s > T_m \text{ και } n = 0,3 \text{ όταν } T_s < T_m \end{aligned} \quad (3.3.2.5)$$

Οι εξισώσεις (3.3.2.4) και (3.3.2.5) ισχύουν για μικρές και μέτριες θερμοκρασιακές διαφορές και οι ιδιότητες του ρευστού υπολογίζονται στη μέση θερμοκρασία την οποία έχει το ρευστό σε μία συγκεκριμένη διατομή. Δίνουν μέγιστο σφάλμα  $\pm 25\%$  για τιμές του αριθμού Prandtl από 0,67 έως 100. Η μαθηματική έκφραση του Petukhov για τον αριθμό Nusselt είναι ακριβέστερη και ισχύει και σε μη λείους αγωγούς:

$$Nu = \frac{RePr}{X} \left( \frac{f}{8} \right) \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^n \quad \text{όπου} \quad X = 1,07 + 12,7 (Pr^{2/3} - 1) \left( \frac{f}{8} \right)^{1/2} \quad (3.3.2.6)$$

όπου  $n = 0,11$  για ομοιόμορφη  $T_s$  και  $T_m < T_s$

$n = 0,25$  για ομοιόμορφη  $T_s$  και  $T_m > T_s$

$n = 0,00$  για αέρια ή ομοιόμορφη πυκνότητα παροχή θερμότητας

Η εξίσωση (3.3.2.6) εφαρμόζεται όταν  $10^4 < Re < 5 \times 10^6$ ,  $0,5 < Pr < 200$  με σφάλμα 5-6% και  $0,5 < Pr < 2000$  με σφάλμα 10% και  $0,08 < \left( \frac{\mu_s}{\mu} \right) < 40$ .

### 3.3.3 Εξαναγκασμένη συναγωγή

Το φαινόμενο της εξαναγκασμένης συναγωγής έχει ήδη αναλυθεί στην ενότητα 3.3.1. Στην παρούσα ενότητα δίνονται σχέσεις υπολογισμού του μέσου αριθμού Nusselt για βασικές περιπτώσεις μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή οι οποίες δεν παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Μία σχέση υπολογισμού του μέσου αριθμού Nusselt για ροή παράλληλη προς επίπεδο σώμα που προτάθηκε από τον Whitaker:

$$Nu_m = 0,036 Pr^{0,43} \left[ Re_L^{0,8} - 9200 \right] \cdot \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{0,25} \quad (3.3.3.1)$$

Στην εξίσωση (3.3.3.1) η στρωτή ροή αν υπάρχει πριν την τυρβώβη έχει ληφθεί υπόψη και όλες οι ιδιότητες του ρευστού εκτός της  $\mu_s$  αναφέρονται στη θερμοκρασία της αδιατάρακτης ροής του. Η ισχύς της (3.3.3.1) έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά για  $2 \times 10^5 < Re_L < 5,5 \times 10^6$ ,  $0,70 < Pr < 380$  και  $0,26 < \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right) < 3,5$ . Σε περίπτωση ατμοσφαιρικού αέρα ο λόγος  $\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \approx 1$ . Οι ιδιότητες αναφέρονται στη θερμοκρασία που υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της θερμοκρασίας του στερεού και της αδιατάρακτης ροής του ρευστού.

Ο μέσος Nusselt σε ροή ρευστών κάθετα προς ένα απλό κυλινδρικό σώμα υπολογίζεται ως εξής:

$$Nu_m = C Re_D^n Pr^{1/3} \quad (3.3.3.2)$$

Οι τιμές των  $C$  και  $n$  δίνονται στον πίνακα 3.3.3 και οι ιδιότητες του ρευστών αναφέρονται στη θερμοκρασία αναφοράς  $T_f$ .

**Πίνακας 3.3.3.** Σταθερές της εξίσωσης (3.3.3.2) (Κακάτσιος 2006)

$Nu_m = C Re_D^n Pr^{1/3}, \quad T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2}$		
$Re_D = u_\infty D/v$	C	n
0,4÷4,0	0,989	0,330
4÷40	0,911	0,385
40÷4000	0,683	0,466
4000÷40.000	0,193	0,618
40.000÷400.000	0,0266	0,805

Για την περίπτωση αυτή ο Whitaker προτείνει τη σχέση:

$$Nu_m = \left[ 0,4 \cdot Re^{0,5} + 0,06 Re^{2/3} \right] Pr^{0,4} \cdot \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right)^{0,25} \quad (3.3.3.3)$$

η οποία με σφάλμα  $\pm 25\%$  επαληθεύεται πειραματικά για  $40 < Re < 10^5$ ,  $0,68 < Pr < 300$  και  $0,25 < \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_s} \right) < 5,2$ . Στην εξίσωση (3.3.3.3) όλες οι ιδιότητες των ρευστών εκτός της  $\mu_s$  αναφέρονται στη θερμοκρασία της αδιατάρακτης ροής του. Σε περίπτωση ατμοσφαιρικού αέρα ο λόγος  $\frac{\mu_\infty}{\mu_s} \approx 1$ .

Οι ιδιότητες αναφέρονται στη θερμοκρασία που υπολογίζεται ως ο μέσος όρος της θερμοκρασίας του στερεού και της αδιατάρακτης ροής του ρευστού.

### 3.4 ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ

Όλα τα σώματα με θερμοκρασία μεγαλύτερη από το απόλυτο μηδέν ακτινοβολούν θερμότητα. Είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και σε αντίθεση με την αγωγή και συναγωγή εμποδίζεται από την παρουσία ενδιάμεσων σωμάτων.

#### 3.4.1 Χαρακτηριστικά θερμικής ακτινοβολίας

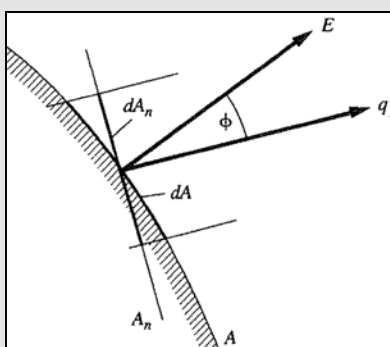
Ο Maxwell διατύπωσε τη θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων συνδυάζοντας το νόμο Ampere που περιγράφει το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από το ηλεκτρικό ρεύμα με το νόμο Faraday. Τα κύματα αυτά εμφανίζονται για όλα τα μήκη κύματος δηλαδή με θερμική ακτινοβολία, ακτίνες γ, μικροκύματα κ.λ.π. Το μήκος κύματος της θερμικής ακτινοβολίας κυμαίνεται από 0.1 μέχρι 100 μm. Η ακτινοβολία ενός συγκεκριμένου μήκους είναι μονοχρωματική ακτινοβολία. Η φασματική κατανομή της ακτινοβολίας εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τις ιδιότητες της επιφάνειας ενός σώματος.

#### 3.4.2 Μέλαν σώμα–Νόμος Stefan-Boltzmann

Το μέλαν σώμα για μια δεδομένη θερμοκρασία ακτινοβολεί το μεγαλύτερο ποσό θερμότητας από όλα τα σώματα. Είναι το ανώτατο όριο για τη θερμότητα με ακτινοβολία. Το μέλαν σώμα έχει την ιδιότητα να απορροφά κάθε προσπίπτουσα ακτινοβολία και ισχύουν οι απλούστεροι νόμοι.

Η ακτινοβολούμενη ενέργεια  $E$  από μια πραγματική επιφάνεια  $dA$  είναι (βλ. σχήμα 3.4.1):

$$EdA = qdA_n \tag{3.4.2.1}$$



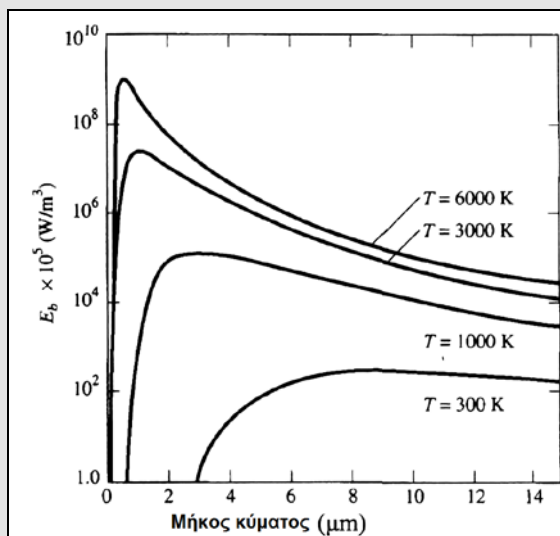
**Σχήμα 3.4.1.** Ενέργεια που εκπέμπεται από επιφάνεια σώματος (Κακάτσιος 2006)

Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος υπολογίζεται από το νόμο Stefan-Boltzmann:

$$E_b = \sigma T^4 \tag{3.4.2.2}$$

Ήδη έχει αναφερθεί η σταθερά Stefan-Boltzmann  $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} [W/m^2 K^4]$

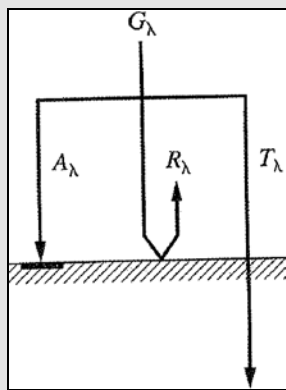
Ο νόμος Stefan-Boltzmann προκύπτει και με ολοκλήρωση της σχέσης κατανομής της ακτινοβολίας Planck σε όλα τα μήκη κύματος. Το σχήμα 3.4.2 παρουσιάζει μονοχρωματική ακτινοβολία μέλανος σώματος για διάφορες θερμοκρασίες.



**Σχήμα 3.4.2.** Μονοχρωματική ακτινοβολία μέλανος σώματος για διάφορες θερμοκρασίες (Κακάτσιος 2006)

Συντελεστής απορρόφησης

Εάν  $G_\lambda$  είναι προσπίπτουσα μονοχρωματική ακτινοβολία σε ένα σώμα, ένα τμήμα της  $R_\lambda$  ανακλάται, η  $A_\lambda$  απορροφάται και η  $T_\lambda$  διέρχεται δια του σώματος (σχήμα 3.4.3):



**Σχήμα 3.4.3.** Η κατανομή της ακτινοβολίας που προσπίπτει σε ένα σώμα (Κακάτσιος 2006)

$$G_\lambda = A_\lambda + R_\lambda + T_\lambda \quad (3.4.3.1)$$

$$\text{ή } 1 = \alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda \quad (3.4.3.2)$$

$\alpha_\lambda = A_\lambda / G_\lambda$  ο μονοχρωματικός συντελεστής απορρόφησης,  $\rho_\lambda = R_\lambda / G_\lambda$  ο μονοχρωματικός συντελεστής ανάκλασης, και  $\tau_\lambda = T_\lambda / G_\lambda$  ο μονοχρωματικός συντελεστής διάβασης.

Σε αδιαφανές σώμα  $\tau_\lambda = 0$ .

Οι ιδιότητες εξαρτώνται από το μήκος κύματος  $\lambda$  της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Ο συντελεστής απορρόφησης για όλα τα μήκη κύματος ισούται με:

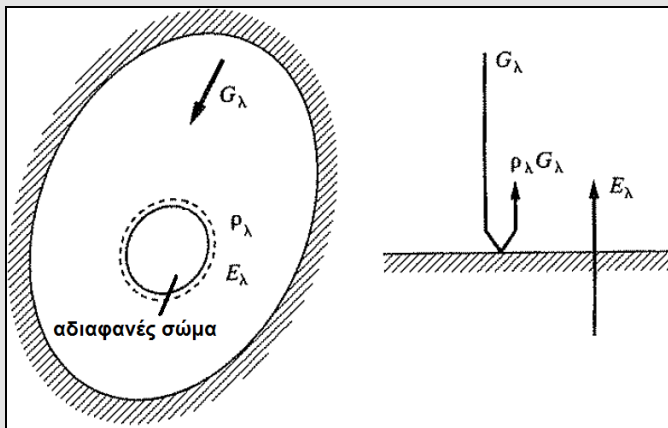


$$\alpha = \frac{\int_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_{\lambda} G_{\lambda} d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} G_{\lambda} d\lambda} \quad (3.4.3.3)$$

Στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία η γωνία ανάκλασης από μια σιλιπνή επιφάνεια ισούται με τη γωνία πρόσπτωσης (κατοπτρική ανάκλαση). Ένα πραγματικό σώμα, με μη λεία επιφάνεια, εμφανίζει ανισοτροπική ανάκλαση. Γενικότερα συμβαίνει και διάχυτη ανάκλαση.

### 3.4.3 Νόμος Kirchhoff-Συντελεστής εκπομπής

Μελετάται ένας κλειστός χώρος με μονοχρωματική ακτινοβολία  $G_{\lambda}$  και ένα μονοχρωματικό αδιαφανές σώμα  $\tau_{\lambda} = 0$  (σχήμα 3.4.4).



Σχήμα 3.4.4. Ο νόμος του Kirchhoff

Ο μονοχρωματικός συντελεστής ανάκλασης του σώματος είναι  $\rho_{\lambda}$  και η μονοχρωματική εκπεμπόμενη ακτινοβολία του  $E_{\lambda}$ . Σε συνθήκες ισορροπίας από το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα ισχύει:

$$G_{\lambda} - (\rho_{\lambda} G_{\lambda} + E_{\lambda}) = 0 \quad (3.4.4.1)$$

Δηλαδή προκύπτει ο νόμος Kirchhoff:

$$G_{\lambda} = E_{\lambda} / \alpha_{\lambda} = \text{const.} \quad (3.4.4.2)$$

Εάν  $\alpha_{\lambda} = 1$  υπάρχει η δυνατότητα ορισμού του μονοχρωματικού συντελεστή απορρόφησης για συνθήκες ισορροπίας ως το πηλίκο της εκπεμπόμενης ενέργειας από το σώμα  $E_{\lambda}$  προς την αντίστοιχη μέλανος σώματος της ίδιας θερμοκρασίας  $E_{b\lambda}$ .

$$a_{\lambda} = E_{\lambda} / E_{b\lambda} \quad (3.4.4.3)$$

Ο μονοχρωματικός συντελεστής εκπομπής ορίζεται:

$$\varepsilon_{\lambda} = E_{\lambda} / E_{bl} \quad (3.4.4.4)$$

Ο ολικός συντελεστής εκπομπής προκύπτει με ολοκλήρωση σε όλο το φάσμα των μηκών κύματος. Σε φαιό σώμα, για δεδομένη θερμοκρασία, ο λόγος της μονοχρωματικής εκπεμπόμενης ενέργειας προς τη μονοχρωματική εκπεμπόμενη ενέργεια μέλανος σώματος είναι σταθερός, για όλα τα μήκη κύματος.

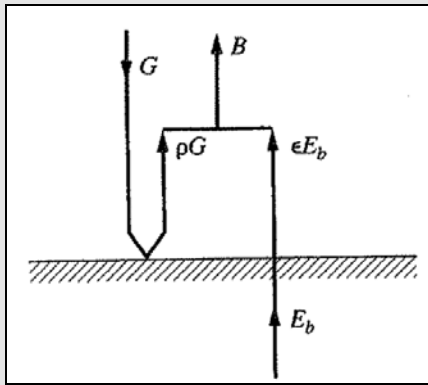
Στην εξίσωση (3.1.5) η οποία αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο υπάρχει η έννοια του συντελεστή εκπομπής  $\varepsilon$ . Στον πίνακα 3.4.1 παρουσιάζονται συντελεστές εκπομπής διαφόρων σωμάτων.

**Πίνακας 3.4.1.** Συντελεστής εκπομπής διαφόρων σωμάτων προς την κατεύθυνση της κατακόρυφου

Υλικά	T [°C]	$\varepsilon$
Αλουμίνιο έντονα οξειδωμένο	100-500	0,20-0,33
Αλουμίνιο χυτό	21	0,04
Ανοξειδωτος χάλυβας λειασμένος	23	0,16/0,17
Ανοξειδωτος χάλυβας λειασμένος μετά από θέρμανση και ψύξη	230	0,57
Αντιμόνιο λειασμένο	37-260	0,28-0,31
Βολφράμιο σύρμα	3300	0,39
Γυαλί λείο	22	0,94
Γυαλί πυρέξ	260-530	0,95-0,85
Ελαστικό μαλακό γκρίζο	23	0,86
Ελαστικό σκληρό	23	0,94
Μάρμαρο φωτεινό γκρίζο λειασμένο	22	0,93
Μόλυβδος καθαρός λειασμένος	260	0,08
Νερό βαθύ	0-100	0,96
Ξύλο	20	0,80-0,90
Ορείχαλκος έντονα λειασμένος	250-360	0,028-0,031
Ορείχαλκος οξειδωμένος	200-500	0,60
Πάγος κρυσταλλωμένος	0	0,985
Σίδηρος λειασμένος	175-225	0,052-0,064
Σίδηρος οξειδωμένος	100	0,74
Σίδηρος σκουριασμένος	20	0,69
Τούβλο λείο	1100	0,75
Τούβλο τραχύ	21	0,93
Τσιμέντο τραχύ	37	0,94
Χαλκός λειασμένος	80	0,018
Χαλκός οξειδωμένος	37	0,78
Χαρτί σύνθετες	20	0,80-0,90
Χυτοσίδηρος	22	0,44
Χώμα	37	0,93-0,96

### 3.4.4 Συντελεστής μεταφοράς θερμότητας με ακτινοβολία

Η διεθνής βιβλιογραφία προτείνει την επέκταση και στη μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία της χρήσης του ηλεκτρικού αναλόγου. Μελετάται αδιαφανές φαιό σώμα (σχήμα 3.4.5).



**Σχήμα 3.4.5.** Ακτινοβολία  $B$  που φεύγει από στερεό αδιαφανές σώμα (Κακάτσιος 2006)

Η ακτινοβολία που φεύγει από την επιφάνεια είναι:

$$Q/A = q = B - G \quad (3.4.5.1)$$

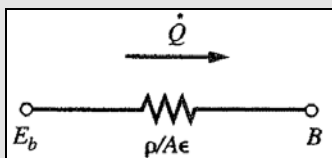
$G$  είναι η προσπίπτουσα ακτινοβολία. Για την ακτινοβολία  $B$  ισχύει:

$$B = \rho G + \varepsilon E_b \quad (3.4.5.2)$$

όπου  $E_b$  ακτινοβολούμενη ενέργεια μέλανος σώματος.

$$Q = \frac{E_b - B}{\rho / A\varepsilon} \quad (3.4.5.3)$$

Η εξίσωση (3.4.5.3) δείχνει το ρεύμα θερμότητας με «κινούσα» δύναμη τη διαφορά δυναμικού  $E_b - B$  και αντίσταση  $\rho / A\varepsilon$ . Το σχήμα 3.4.6 απεικονίζει το ηλεκτρικό κύκλωμα.



**Σχήμα 3.4.6.** Ηλεκτρικό κύκλωμα με αντίσταση (Κακάτσιος 2006)

Στο μέλαν σώμα  $\rho = 0$ ,  $B = E_b$

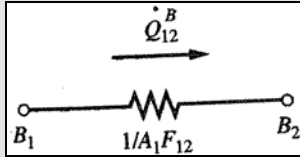
Εξετάζονται δυο επιφάνειες 1 και 2. Από την ολική ακτινοβολία  $B_1 A_1$  που αφήνει την επιφάνεια 1 το ποσό  $B_1 A_1 F_{12}$  συναντά την επιφάνεια 2. Όμοια, από την επιφάνεια 2 και το ποσό  $B_2 A_2$ , το  $B_2 A_2 F_{21}$  συναντά την επιφάνεια 1.

Το μέγεθος  $F_{12} = \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{B_1 A_1}$  είναι ο γωνιακός παράγοντας της επιφάνειας 1 προς την επιφάνεια 2 και ισχύει η σχέση αμοιβαιότητας  $A_1 F_{12} = A_2 F_{21}$

Το ρεύμα θερμότητας  $Q$  υπολογίζεται ως εξής:

$$Q_{12} = \frac{B_1 - B_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} \quad (3.4.5.4)$$

Το σχήμα 3.4.7 παρουσιάζει το αντίστοιχο κύκλωμα.

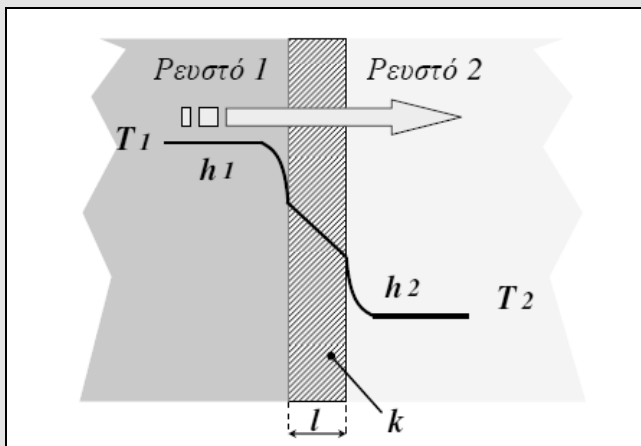


**Σχήμα 3.4.7.** Ηλεκτρικό κύκλωμα με αντίσταση (Κακάσιος 2006)

Η μέθοδος υπολογίζει την ακτινοβολούμενη ενέργεια μεταξύ των επιφανειών ενός χώρου.

### 3.5 ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στη φύση σπάνια συμβαίνουν φαινόμενα κατά τα οποία λαμβάνει χώρα μία μόνο μορφή μετάδοσης θερμότητας. Συνήθως η μετάδοση της θερμότητας γίνεται με παραπάνω από έναν τρόπους δηλαδή είτε με αγωγή και συναγωγή, είτε με αγωγή και ακτινοβολία, είτε με συναγωγή και ακτινοβολία, είτε με αγωγή, συναγωγή και ακτινοβολία. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται χαρακτηριστικές περιπτώσεις μετάδοσης θερμότητας με σύνθετο τρόπο δηλαδή με συνδυασμό δύο ή περισσότερων μορφών θερμότητας.



**Σχήμα 3.5.1.** Μόνιμη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε επίπεδο στερεό σώμα πάχους  $l$  που έρχεται σε επαφή με διαφορετικής θερμοκρασίας ρευστά (<http://users.ntua.gr/xenophon/>)

Το ρεύμα θερμότητας μεταξύ δύο ρευστών που βρίσκονται σε διαφορετικές θερμοκρασίες και τα οποία χωρίζονται από επίπεδο στερεό σώμα (βλ. σχήμα 3.5.1) δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.5.1)$$

Όπως είναι αντιληπτό το φαινόμενο περιλαμβάνει μετάδοση θερμότητας με αγωγή και συναγωγή. Θέτοντας όπου  $\frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = UA$  η εξίσωση (3.5.1) γράφεται:

$$Q = UA\Delta T \tag{3.5.2}$$

Ο συντελεστής  $U$  [ $W/m^2 K$ ] ονομάζεται ειδική θερμική διαπερατότητα και αναφέρεται σε συγκεκριμένη επιφάνεια, την επιφάνεια αναφοράς η οποία θα πρέπει να ορίζεται για κάθε περίπτωση που εξετάζεται.

Περίπτωση μετάδοσης θερμότητας με συναγωγή και ακτινοβολία (Κακάτσιος 2006) παρουσιάζεται στο σχήμα 3.5.2 και ο υπολογισμός του ρεύματος θερμότητας έχει ως εξής:

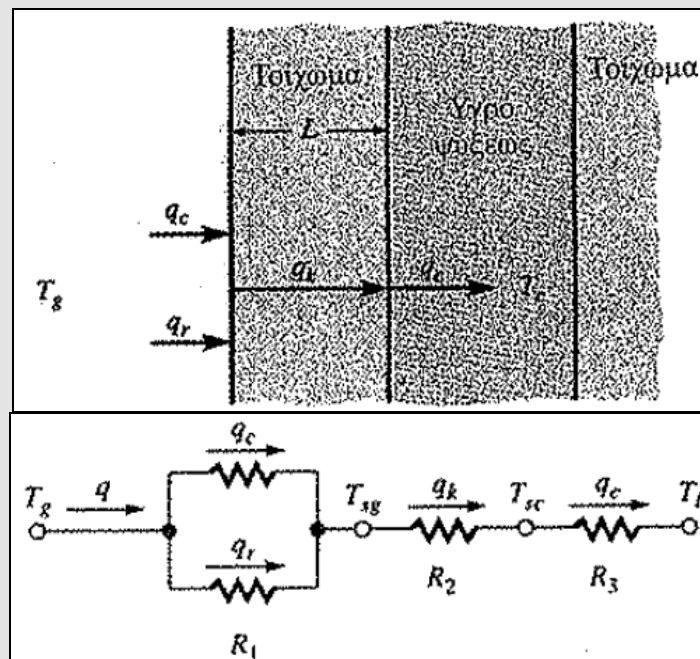
$$Q = Q_{conv} + Q_{rad} = hA(T_g - T_{sg}) + h_r A(T_g - T_{sg}) = (h_{c1} + h_{r1})A(T_g - T_{sg}) \tag{3.5.3}$$

Θέτοντας όπου  $\frac{1}{A(h_r + h_{c1})} = R_1$  η εξίσωση (3.5.3) γράφεται:

$$Q = \frac{T_g - T_{sg}}{R_1} \tag{3.5.4}$$

Είναι  $T_g$  η θερμοκρασία του θερμού αερίου,  $T_{sg}$  η θερμοκρασία της θερμής επιφάνειας του τοιχώματος,  $h_r$  ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας με ακτινοβολία στη θερμή επιφάνεια και  $h_{c1}$  η ειδική συναγωγιμότητα του θερμού αερίου. Ο συντελεστής ακτινοβολίας  $\epsilon$  θεωρείται ίσος με τη μονάδα οπότε ο συντελεστής  $h_r$  είναι:

$$h_r = \frac{\sigma(T_g^4 - T_{sg}^4)}{T_g - T_{sg}} \tag{3.5.5}$$



**Σχήμα 3.5.2.** Μόνιμη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε διπλό τοίχωμα με την παρεμβολή υγρού ψύξης (Κακάτσιος 2006)

Στο σχήμα 3.5.3 εικονίζεται ένα σύνθετο κυλινδρικό σώμα (Kreith and Bohn 1993). Πρόκειται για κυλινδρικό αγωγό που φέρει μόνωση και στο εσωτερικό του κυκλοφορεί θερμό ρευστό. Το ρεύμα θερμότητας υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$Q = \frac{T_{h,\infty} - T_{c,\infty}}{\frac{1}{h_{ci}2\pi r_1 L} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_{co}2\pi r_3 L}} \quad (3.5.6)$$

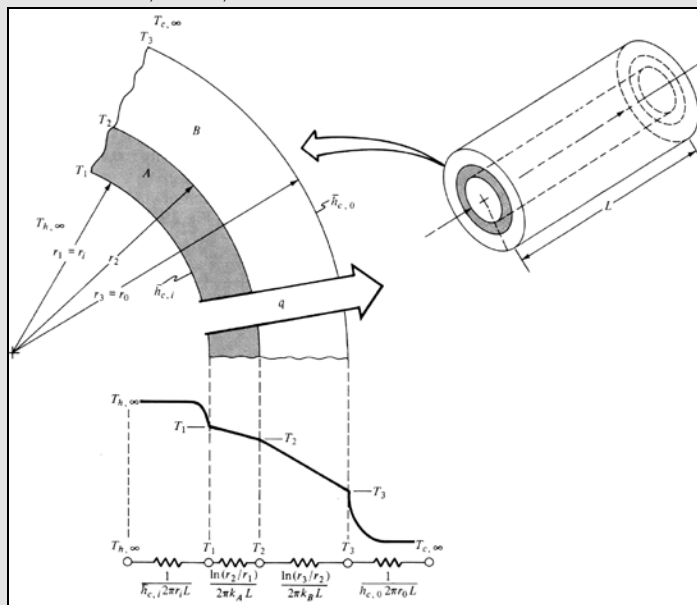
Τα σύμβολα της εξίσωσης (3.5.6) ορίζονται στο σχήμα 3.5.3. Θέτοντας όπου

$$UA = \frac{1}{\frac{1}{h_{ci}A_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_{co}A_o}} \quad \text{η εξίσωση (3.5.6) γράφεται ως εξής:}$$

$$Q = UA(T_{h,\infty} - T_{c,\infty}) \quad (3.5.7)$$

Επιλέγοντας ως επιφάνεια αναφοράς για την συναλλαγή θερμότητας την εξωτερική επιφάνεια του αγωγού  $A_o$  με  $A_o = 2\pi r_3 L$  η εξίσωση (3.5.7) γράφεται ως:

$$Q = UA_o(T_{h,\infty} - T_{c,\infty}) \quad (3.5.8)$$



**Σχήμα 3.5.3.** Μόνιμη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε σύνθετο κυλινδρικό σώμα που έρχεται σε επαφή με διαφορετικής θερμοκρασίας ρευστά (Kreith and Bohn 1993)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η τιμή της ειδικής θερμικής διαπερατότητας  $U$  που όπως έχει αναφερθεί εξαρτάται από την επιφάνεια ισούται με:

$$U = \frac{1}{\frac{r_3}{r_1 h_{ci}} + \frac{r_3 \ln(r_2/r_1)}{\lambda_A} + \frac{r_3 \ln(r_3/r_2)}{\lambda_B} + \frac{1}{h_{co}}} \quad (3.5.9)$$

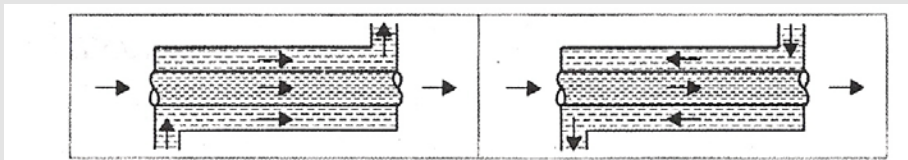
Επιπλέον, είναι άξιο επισήμανσης το γεγονός ότι αν μονωθεί εξωτερικά αγωγός μικρής διατομής είναι δυνατόν οι απώλειες θερμότητας να αυξηθούν αντί να μειωθούν. Οι απώλειες αυτές θα αρχίσουν να μειώνονται όταν το πάχος της μόνωσης λάβει μία κρίσιμη τιμή  $r_{oc}$  η οποία ονομάζεται κρίσιμο πάχος μόνωσης και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$r_{oc} = \frac{\lambda}{h_o} \quad (3.5.10)$$

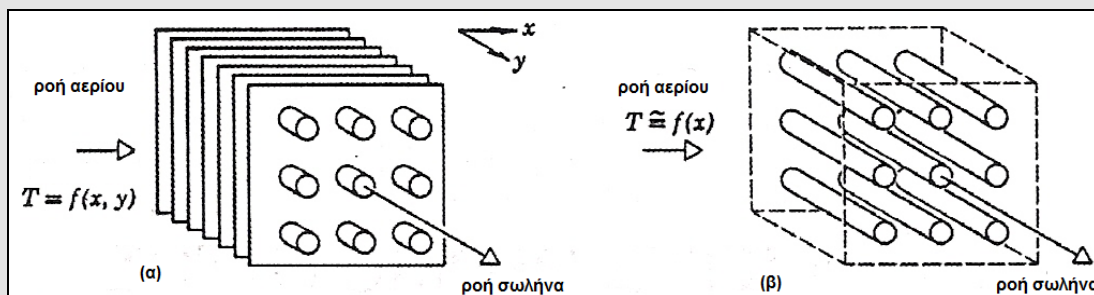
όπου  $h_o$  η τιμή της ειδικής συναγωγιμότητας του εξωτερικού περιβάλλοντος του αγωγού και  $\lambda$  η ειδική θερμική αγωγιμότητα του μονωτικού υλικού.

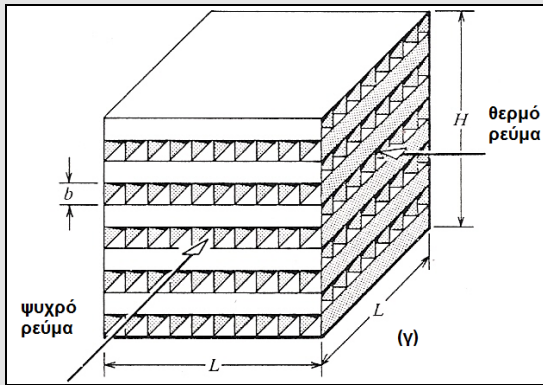
### 3.6 ΕΝΑΛΛΑΚΤΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Στις μηχανολογικές εγκαταστάσεις χρησιμοποιούνται συσκευές οι οποίες διευκολύνουν τη μεταφορά θερμότητας από το θερμότερο προς το ψυχρότερο ρευστό. Είναι οι εναλλάκτες θερμότητας στους οποίους η διεργασία λαμβάνει χώρα με ή χωρίς ανάμειξη των ρευστών. Το θέμα έχει αποτελέσει αντικείμενο διερεύνησης πολλών επιστημόνων (Fraas 1989, Kakac and Liu 2002, Σαγιά 2006). Στις περισσότερες εφαρμογές εναλλακτών τα ρευστά δεν έρχονται σε άμεση επαφή μεταξύ τους αλλά διαχωρίζονται από μια επιφάνεια (π.χ. τοίχωμα σωλήνα, επίπεδη ή κυρτή επιφάνεια). Οι εναλλάκτες διακρίνονται ανάλογα με την κατεύθυνση της ροής των ρευστών σε συσκευές ομοροής, αντιρροής, διασταυρούμενης ροής (σχήματα 3.6.1 και 3.6.2).



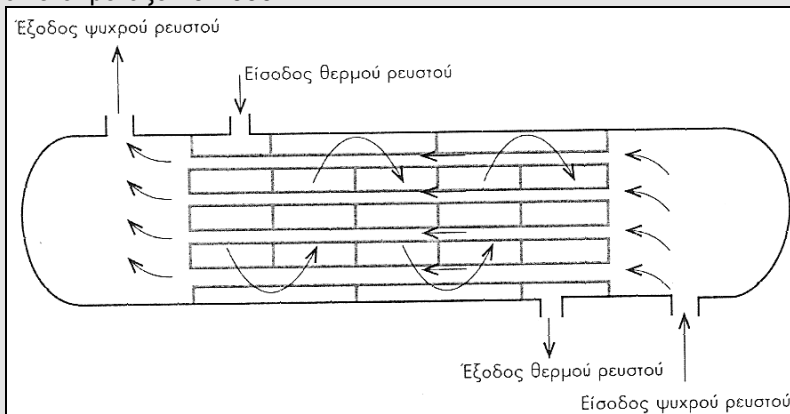
**Σχήμα 3.6.1** Εναλλάκτες θερμότητας ομοροής και αντιρροής (Κακάτσιος 2006)





**Σχήμα 3.6.2.** Εναλλάκτες θερμότητας διασταυρούμενης ροής (α) χωρίς ανάμειξη των ρευστών (β) με ανάμειξη του ενός ρευστού (γ) εναλλάκτης διασταυρούμενης ροής απλής διαδρομής (Σαγιά 2006)

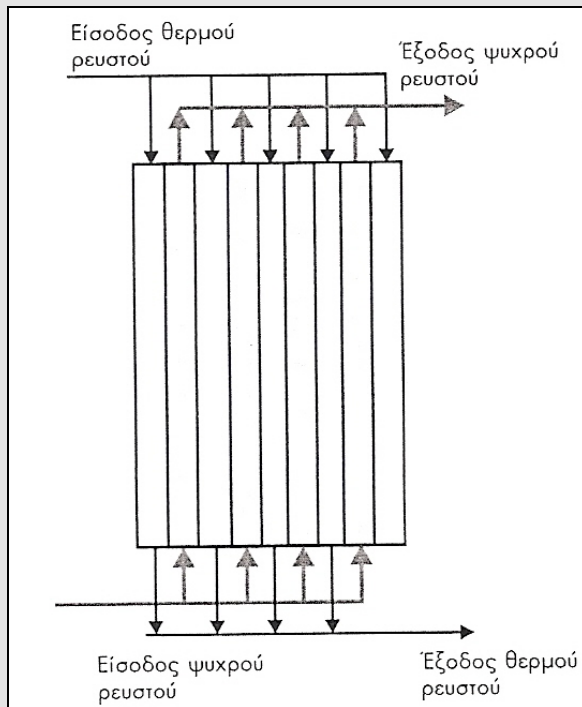
Το σχήμα 3.6.3 απεικονίζει εναλλάκτη κελύφους σωλήνων. Ο τύπος αυτός χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις εφαρμογές. Τίθενται περιορισμοί από το υλικό κατασκευής και τα συναλασσόμενα ρευστά. Η μέγιστη πίεση λειτουργίας είναι 30 MPa και η θερμοκρασία στην περιοχή των 200-600 °C. Μπορεί να χρησιμοποιηθούν και πολλαπλά κελύφη. Το μέγεθος της επιφάνειας συναλλαγής κυμαίνεται μεταξύ 10-1000 m<sup>2</sup>.



**Σχήμα 3.6.3.** Εναλλάκτης θερμότητας κελύφους/σωλήνων (Κακάτσιος 2006)

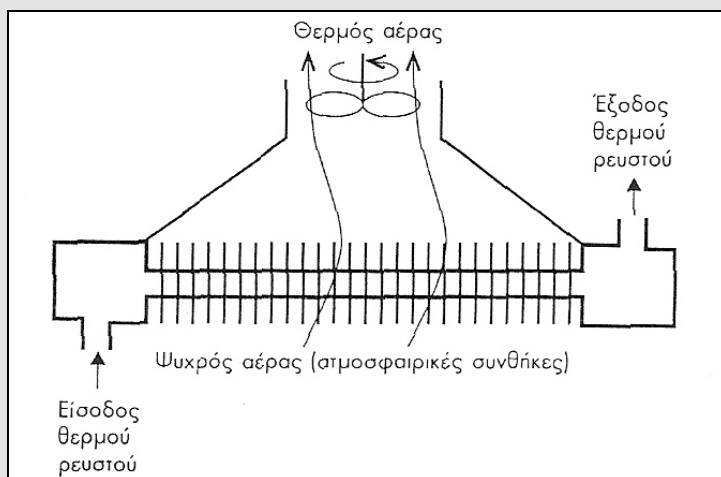
Οι εναλλάκτες με επίπεδες πλάκες και φλάντζες δίνονται στο σχήμα 3.6.4. Έχουν τυποποιημένη κατασκευή και είναι οικονομικότεροι στις περιπτώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Χαρακτηρίζονται από μεγάλη επιφάνεια εναλλαγής ανά μονάδα όγκου. Είναι ακατάλληλοι για αέρια καθώς έχουν περιορισμούς στις φλάντζες. Η μέγιστη πίεση λειτουργίας κυμαίνεται από 1,6-2,5 MPa ανάλογα με τη θερμοκρασία και τις διαστάσεις. Η θερμοκρασιακή περιοχή λειτουργίας τους είναι συνήθως 25-175 °C ενώ για ορισμένους τύπους είναι 40-200 °C. Το μέγεθος της επιφάνειας εναλλαγής κυμαίνεται μεταξύ 1-1200 m<sup>2</sup>.





**Σχήμα 3.6.4.** Εναλλάκτης με επίπεδες πλάκες και φλάντζες (Κροκίδα et al 2003)

Οι αερόψυκτοι εναλλάκτες χρησιμοποιούνται σε συστήματα απόρριψης θερμότητας και ο σχεδιασμός τους είναι τυποποιημένος. Και σε αυτόν τον τύπο εναλλάκτη μόνο το υλικό κατασκευής περιορίζει τα ρευστά. Η μέγιστη πίεση λειτουργίας είναι 2 MPa και η θερμοκρασία περίπου 1000°C. Το μέγεθος της επιφάνειας συναλλαγής κυμαίνεται μεταξύ 5-200 m<sup>2</sup>.



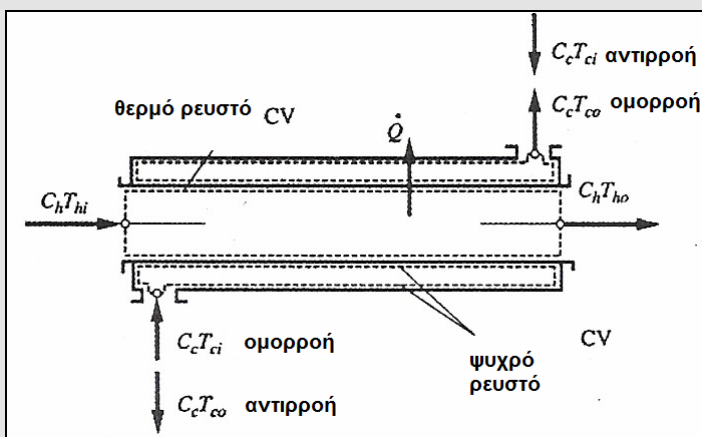
**Σχήμα 3.6.5.** Αερόψυκτοι εναλλάκτες (Κροκίδα et al 2003)

Ο σχεδιασμός ενός εναλλάκτη περιλαμβάνει θερμική, μηχανολογική και κατασκευαστική θεώρηση. Με τη θερμική μελέτη επιλέγεται ο τύπος της συσκευής και εκτιμάται το μέγεθος της επιφάνειας μεταφοράς θερμότητας. Στη συνέχεια υπολογίζονται η πτώση πίεσης, οι διαβρωτικές ιδιότητες των ρευστών και οι θερμικές τάσεις. Ο στόχος είναι η ικανοποίηση των ανωτέρω προϋποθέσεων με το μικρότερο κόστος. Τελικά επιλέγεται συσκευή του εμπορίου που να ανταποκρίνεται σε αυτές τις προδιαγραφές.

### 3.6.1 Θερμική μελέτη εναλλακτών θερμότητας-Μέθοδος LMTD

Στη θερμική μελέτη ενός εναλλάκτη θερμότητας το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Δίνεται η θερμοκρασία εισόδου του θερμού  $T_{hi}$  και κρύου  $T_{ci}$  ρευστού και μία από τις θερμοκρασίες εξόδου των δύο ρευστών. Επίσης, δίνονται οι παροχές μάζας των δύο ρευστών και οι ειδικές θερμοχωρητικότητες αυτών ή αλλιώς απ' ευθείας τα γινόμενα  $C_h$  και  $C_c$  ( $C = \dot{m}c_p$ ).

Η ειδική θερμική διαπερατότητα  $U$  είναι συνήθως δεδομένη ή αλλιώς υπολογίζεται. Ζητείται το μέγεθος  $A$  της επιφάνειας συναλλαγής.



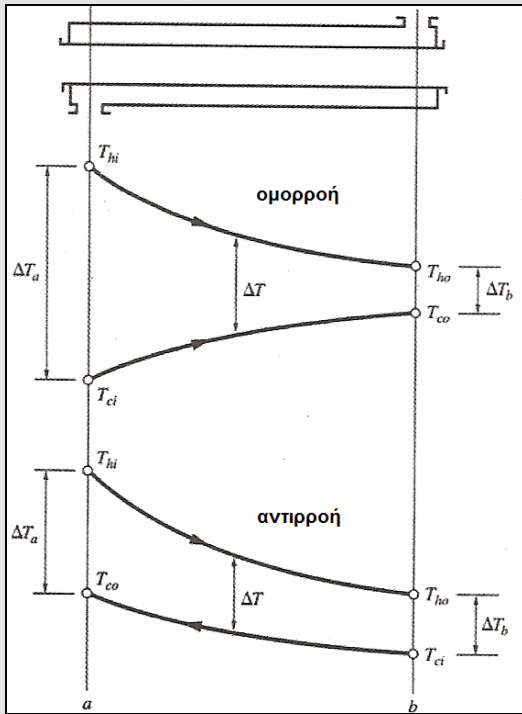
Σχήμα 3.6.6. Όγκος ελέγχου (Σαγιά 2006)

Σύμφωνα με τη μεθοδολογία LMTD ή αλλιώς τη μεθοδολογία της μέσης λογαριθμικής θερμοκρασιακής διαφοράς ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία επίλυσης.

Εφαρμόζεται η γενική εξίσωση  $Q = C_h(T_{hi} - T_{ho}) = C_c(T_{co} - T_{ci})$  που οδηγεί στον υπολογισμό της άγνωστης θερμοκρασίας εξόδου.

$Q$  είναι το ολικό ρεύμα θερμότητας το οποίο μεταφέρεται από το θερμό στο ψυχρό ρευστό και οι δείκτες  $i$  και  $o$  αναφέρονται στις συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο του εναλλάκτη.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η  $U$  αν δεν δίνεται.



**Σχήμα 3.6.7.** Μεταβολή των θερμοκρασιών σε εναλλάκτη ομορροής και αντιρροής (<http://users.ntua.gr/xenophon/>)

Τόσο στους εναλλάκτες ομορροής όσο και στους εναλλάκτες αντιρροής ισχύει η ακόλουθη σχέση :

$$\ln \frac{\Delta T_b}{\Delta T_a} = -(\Delta T_a - \Delta T_b) \frac{UA}{Q} \quad (3.6.1.1)$$

ή

$$Q = UA \Delta T_{lm} \quad (3.6.1.2)$$

Όπου:

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_a - \Delta T_b}{\ln \frac{\Delta T_a}{\Delta T_b}} = \frac{\Delta T_{max} - \Delta T_{min}}{\ln \frac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}}} \quad (3.6.1.3)$$

είναι η λογαριθμική μέση θερμοκρασιακή διαφορά.

$\Delta T_a$  η θερμοκρασιακή διαφορά των ρευστών στην είσοδο του εναλλάκτη και  $\Delta T_b$  η θερμοκρασιακή διαφορά των ρευστών στην έξοδο του εναλλάκτη.

Εάν  $\frac{\Delta T_{max}}{\Delta T_{min}} \leq 2$  αντί της παραπάνω σχέσης είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική μέση

θερμοκρασιακή διαφορά  $\Delta T_{am} = \frac{1}{2} [\Delta T_{max} + \Delta T_{min}]$  με ένα σφάλμα μικρότερο του 4%.

Σε αντιστοιχία με την ανωτέρω εξίσωση σε κάθε εναλλάκτη ισχύει:

$$Q = UA \Delta T_{tm} \quad (3.6.1.4)$$

$\Delta T_{tm}$  είναι η πραγματική μέση θερμοκρασιακή διαφορά και συνδέεται με τη  $\Delta T_{lm}$  με ένα διορθωτικό παράγοντα:

$$F = \frac{\Delta T_{tm}}{\Delta T_{lm}} \quad (3.6.1.5)$$

Επίσης εισάγονται οι παράμετροι:

$$P = \frac{T_{to} - T_{ti}}{T_{si} - T_{ti}} \quad \text{και} \quad R = \frac{T_{si} - T_{so}}{T_{to} - T_{ti}} = \frac{C_T}{C_S} \quad (3.6.1.6)$$

Οι δείκτες  $t$  και  $s$  αναφέρονται στους αγωγούς και στο κέλυφος.

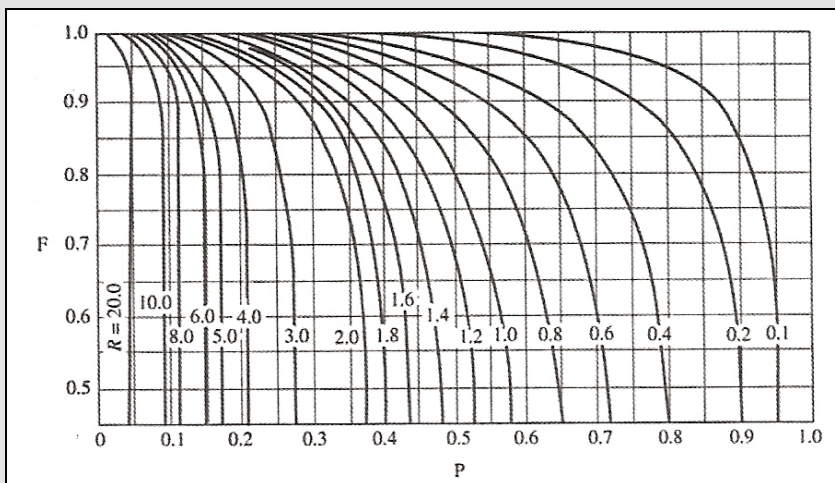
Ο παράγων  $F$  δεν επηρεάζεται από το εάν το θερμό ή ψυχρό υγρό κυκλοφορεί στο κέλυφος ή στους αγωγούς αρκεί οι απώλειες θερμότητας στο περιβάλλον να είναι αμελητέες.

Έτσι προκύπτει η σχέση:

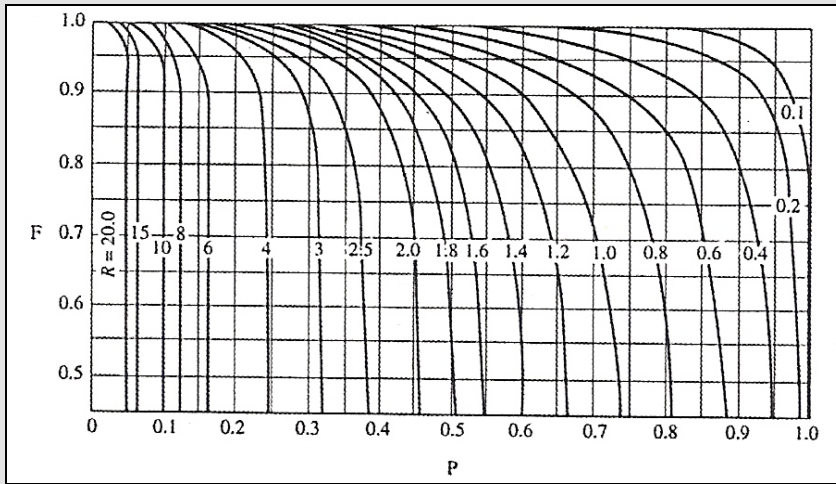
$$Q = UA\Delta T_{lm}F(P,R) \quad (3.6.1.7)$$

από την επίλυση της οποίας υπολογίζεται η ζητούμενη επιφάνεια συναλλαγής  $A$ .

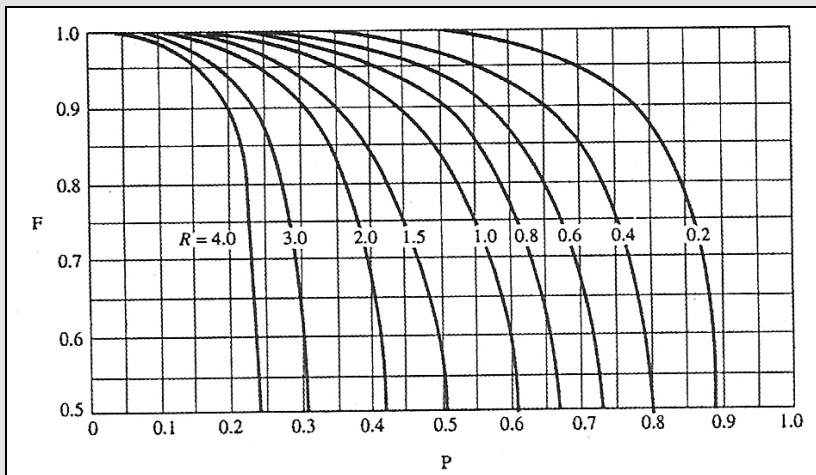
Αναφέρονται ενδεικτικά διαγράμματα για τον παράγοντα  $F(P, R)$ .



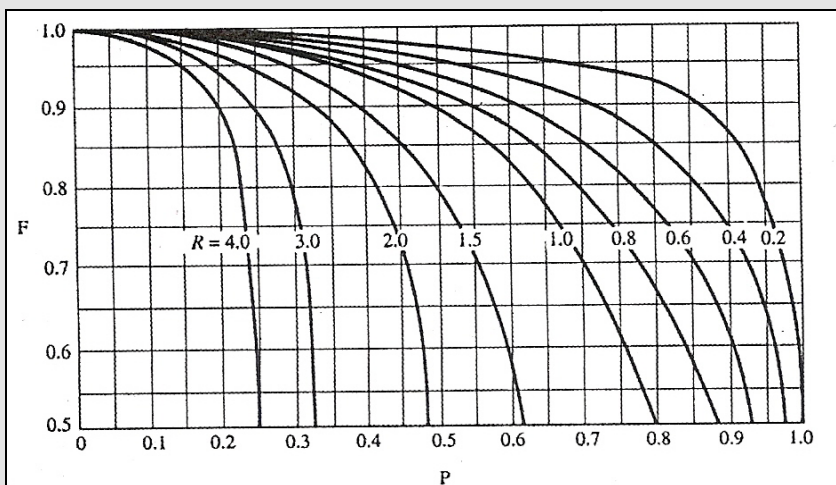
**Σχήμα 3.6.8.** Παράγοντας  $F$  σε εναλλάκτη κελύφους με μια διαδρομή του ρευστού στο κέλυφος και δύο, τέσσερις κ.λ.π. του άλλου ρευστού στους σωλήνες (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.6.9.** Παράγοντας  $F$  σε εναλλάκτη κελύφους με δύο διαδρομές του ρευστού στο κέλυφος και τέσσερις, οκτώ κ.λ.π. του άλλου ρευστού στους σωλήνες (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.6.10.** Παράγοντας  $F$  σε εναλλάκτη διασταυρούμενης ροής με ανάμειξη μόνον του ενός ρευστού (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.6.11.** Παράγοντας  $F$  σε εναλλάκτη διασταυρούμενης ροής χωρίς ανάμειξη των ρευστών (Κακάτσιος 2006)

### 3.6.2 Θερμική μελέτη εναλλακτών θερμότητας- Μέθοδος NTU

Εδώ μελετούμε τη συμπεριφορά ενός υπάρχοντος εναλλάκτη για διαφορετικές συνθήκες λειτουργίας, ή τη χρήση του για σκοπούς διαφορετικούς από εκείνους για τους οποίους είχε αρχικά μελετηθεί.

Δίνεται η θερμοκρασία εισόδου του θερμού  $T_{hi}$  και κρύου  $T_{ci}$  ρευστού καθώς και το μέγεθος  $A$  της επιφάνειας συναλλαγής. Επίσης, δίνονται οι παροχές μάζας των δύο ρευστών και οι ειδικές θερμοχωρητικότητες αυτών ή αλλιώς απ' ευθείας τα γινόμενα  $C_h$  και  $C_c$ . Η ειδική θερμική διαπερατότητα  $U$  είναι συνήθως δεδομένη ή αλλιώς υπολογίζεται. Ζητούνται οι θερμοκρασίες των ρευστών στην έξοδο  $T_{ho}$  και  $T_{co}$ . Αρχικά εφαρμόζεται και σε αυτή την μέθοδο η γενική εξίσωση:

$$Q = C_h(T_{hi} - T_{ho}) = C_c(T_{co} - T_{ci}) \quad (3.6.2.1)$$

η οποία εξισώνεται με την παράσταση  $\varepsilon C \Delta T$ .

Όπου  $\varepsilon$  είναι η αποτελεσματικότητα του εναλλάκτη και  $\Delta T = T_{hi} - T_{ci}$  είναι η μεγαλύτερη θερμοκρασιακή διαφορά στον εναλλάκτη.

Λαμβάνοντας ως συντελεστή  $C$  τον μικρότερο εκ των  $C_h$  και  $C_c$  και ορίζοντας αυτόν ως  $C_{min}$  προκύπτει ότι σε κάθε εναλλάκτη θερμότητας ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{C_h(T_{hi} - T_{ho})}{C_{min}(T_{hi} - T_{ci})} = \frac{C_c(T_{co} - T_{ci})}{C_{min}(T_{hi} - T_{ci})} \quad (3.6.2.2)$$

Ο άλλος συντελεστής εκ των  $C_h$  και  $C_c$  ορίζεται ως  $C_{max}$ .

Για τον υπολογισμό του μεγέθους  $\varepsilon$  λαμβάνουμε υπ' όψιν τον τύπο του εναλλάκτη θερμότητας.

Στους εναλλάκτες ομοροής ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-\left(1 + \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}\right]}{1 + \frac{C_{min}}{C_{max}}} \quad (3.6.2.3)$$

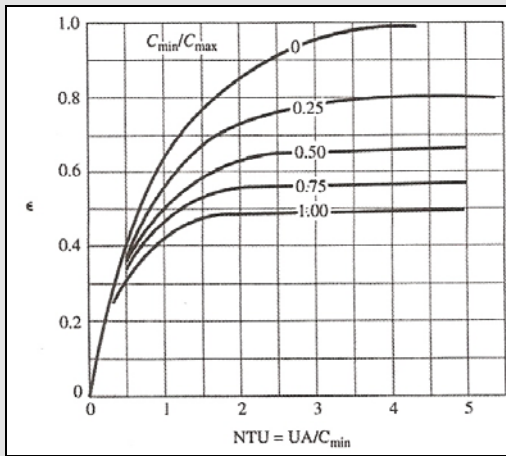
Στους εναλλάκτες αντιροής ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp\left[-\left(1 - \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}\right]}{1 - \frac{C_{min}}{C_{max}} \exp\left[-\left(1 - \frac{C_{min}}{C_{max}}\right) \frac{UA}{C_{min}}\right]} \quad (3.6.2.4)$$

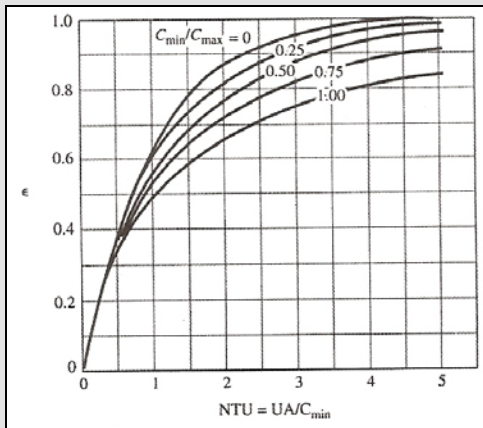
Όπου ο λόγος  $\frac{UA}{C_{min}}$  είναι ο αριθμός μονάδων μεταφοράς, συμβολίζεται με NTU και πρόκειται για τον αριθμό Stanton στον οποίον εμφανίζεται η ειδική θερμική διαπερατότητα.

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}} \quad (3.6.2.5)$$

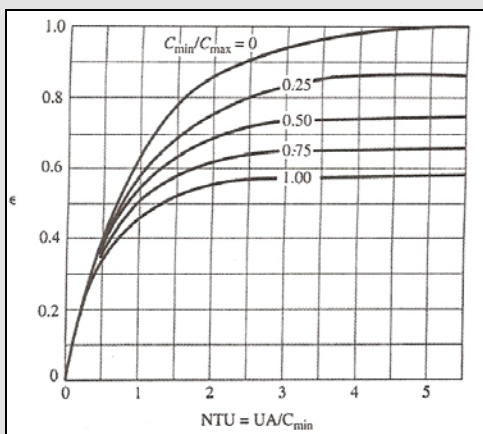
Στη συνέχεια παρατίθεται γραφική απεικόνιση της αποτελεσματικότητας  $\epsilon$  τεσσάρων τύπων εναλλακτών θερμότητας.



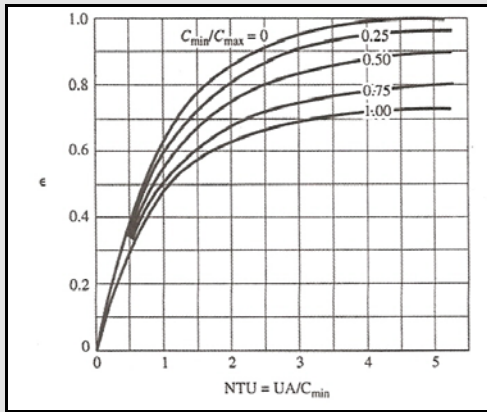
**Σχήμα 3.6.12.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη ομορροής (Κακάτσιος 2006)



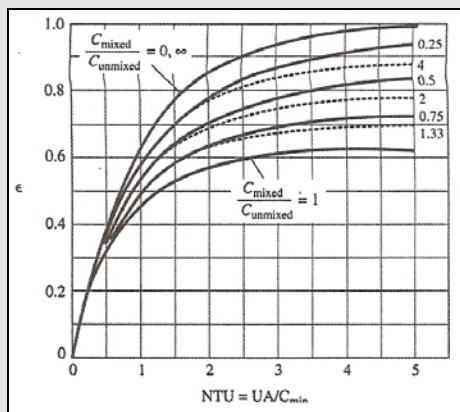
**Σχήμα 2.6.13.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη αντιρροής (Κακάτσιος 2006)



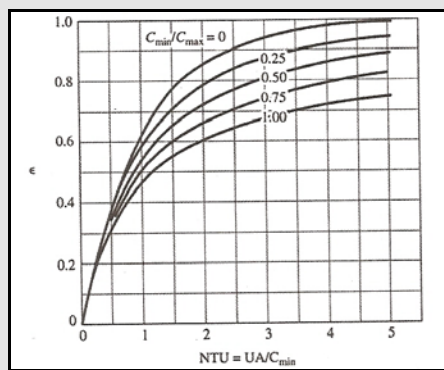
**Σχήμα 3.6.14.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη κελύφους με μια διαδρομή στο κέλυφος και δύο, τέσσερις, κ.λ.π. διαδρομές στους σωλήνες (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.6.15.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη κελύφους με δύο διαδρομές στο κέλυφος και τέσσερις, οκτώ, κ.λ.π. διαδρομές στους σωλήνες (Κακάτσιος 2006)

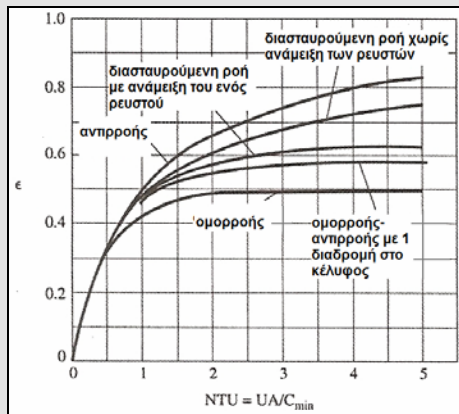


**Σχήμα 3.6.16.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη διασταυρούμενης ροής, μιας διαδρομής, με ανάμειξη μόνον του ενός ρευστού (Κακάτσιος 2006)



**Σχήμα 3.6.17.** Αποτελεσματικότητα εναλλάκτη διασταυρούμενης ροής, χωρίς ανάμειξη των ρευστών (Κακάτσιος 2006)





**Σχήμα 3.6.18.** Αποτελεσματικότητα εναλλακτών θερμότητας (Σαγιά 2006)

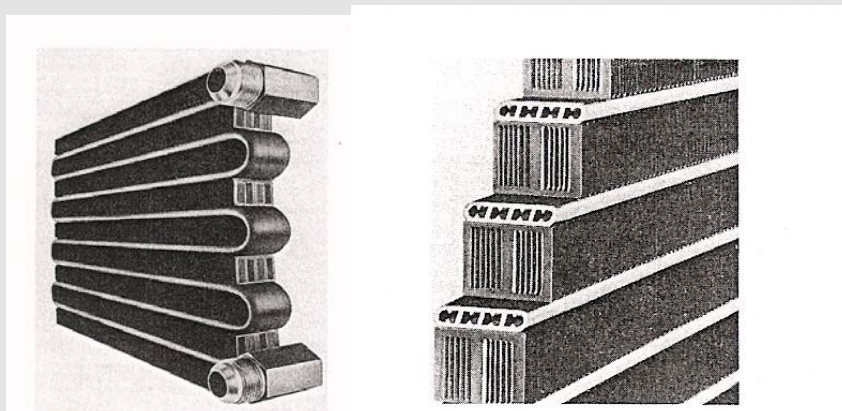
Αξίζει να σημειώσουμε ότι η NTU μέθοδος είναι περισσότερο γενική από την LMTD και για αυτό βρίσκει ευρύτερη εφαρμογή.

### 3.6.3 Βασικά στοιχεία για το σχεδιασμό εναλλακτών θερμότητας

Συνήθως ζητείται ο σχεδιασμός συσκευής που θα έχει ορισμένη θερμική συμπεριφορά και θα ανταποκρίνεται σε ένα σύνολο απαιτήσεων όπως: α) χαμηλό κόστος κτήσης, β) χαμηλό λειτουργικό κόστος, γ) προδιαγραφές σχετικά με το μέγεθος, το σχήμα ή το βάρος, δ) εύκολη συντήρηση.

Το σπουδαιότερο λειτουργικό κόστος είναι της ισχύος που απαιτείται προκειμένου να κυκλοφορήσουν τα ρευστά. Για τα υγρά η ισχύς αυτή δεν επηρεάζει σημαντικά το σχεδιασμό. Για τα αέρια όμως, η απαιτούμενη ισχύς ανά μονάδα μάζας είναι μεγάλη.

Γενικά ο μηχανικός έχει την ελευθερία να διαλέξει γεωμετρική διάταξη (ανηρροή, ομορροή, διασταυρούμενη ροή, πολλαπλές διελεύσεις κ.λ.π.), τύπο επιφάνειας μεταφοράς θερμότητας (ομόκεντρο σωλήνα, επιφάνεια με επίπεδα πτερύγια, δέσμη σωλήνων κ.λ.π) και χαρακτηριστικές διαστάσεις (διάμετρο σωλήνα, απόσταση σωλήνων στη δέσμη κ.λ.π.). Για παράδειγμα το σχήμα 3.6.19 παρουσιάζει δύο επιλογές πτερυγίων εναλλάκτη για την ψύξη πετρελαίου.



**Σχήμα. 3.6.19.** Ψύκτης πετρελαίου με πτερύγια (επίπεδα και τριγωνικά στην πλευρά του πετρελαίου) (Mills 1995)

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. ΕΛΟΤ EN ISO 6946 (E2):2009. Κτηριακά μέρη και στοιχεία - Θερμική αντίσταση και θερμοπερατότητα - Μέθοδος υπολογισμού.
2. ΕΛΟΤ EN ISO 10077-2:2004. Θερμική επίδοση παραθύρων, θυρών και εξώφυλλων - Υπολογισμός θερμικής αγωγιμότητας - Μέρος 2: Υπολογιστική μέθοδος για πλαίσια
3. ΕΛΟΤ EN ISO 10211:2009. Θερμογέφυρες στις κτηριακές κατασκευές - Ροές θερμότητας και επιφανειακές θερμοκρασίες - Λεπτομερείς υπολογισμοί.
4. ΕΛΟΤ EN ISO 13370 (E2):2009. Θερμική επίδοση κτηρίων - Μετάδοση θερμότητας μέσω του εδάφους - Μέθοδοι υπολογισμού.
5. ΕΛΟΤ EN ISO 13786 (E2):2009. Θερμική επίδοση κτιριακών μερών - Δυναμικά θερμικά χαρακτηριστικά - Μέθοδοι υπολογισμού.
6. ΕΛΟΤ EN ISO 13789 (E2):2009. Θερμική επίδοση κτηρίων - Συντελεστές μεταφοράς θερμότητας σχετικά με μετάδοση και αερισμό - Μέθοδος υπολογισμού.
7. ΕΛΟΤ EN ISO 13790 (E2):2009. Ενεργειακή επίδοση κτηρίων - Υπολογισμός των απαιτήσεων ενέργειας για τη θέρμανση και την ψύξη χώρων.
8. ΕΛΟΤ EN ISO 14683:2009. Θερμογέφυρες σε κτηριακές κατασκευές - Γραμμική θερμική μετάδοση - Απλοποιημένες μέθοδοι και τιμές προεπιλογής.
9. Κ. Α. Αντωνόπουλος, Κλιματισμός, Αθήνα 2002
10. Ι. Σ. Αναγνωστόπουλος, Βιομηχανική Ρευστομηχανική, Αθήνα 2003
11. Β. Δ. Παπαευθυμίου, Ψυκτικές και Κλιματιστικές Εγκαταστάσεις Ισχύος, Αθήνα 2006
12. Ξ. Κ. Κακάτσιος, Αρχές Μεταφοράς Θερμότητας και Μάζης, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2006
13. Μ. Κροκίδα, Δ. Μαρίνος-Κουρής, Ζ. Μαρούλης, Σχεδιασμός Θερμικών διεργασιών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2003.
14. Κ. Γ. Πασπαλάς, Μετάδοση Θερμότητας, 3η έκδοση, Σύλλογος Μηχανολόγων-Ηλεκτρολόγων Β. Ελλάδος, Θεσσαλονίκη 2008
15. Ζ. Σαγιά, Προγράμματα Η/Υ για το σχεδιασμό εναλλακτών θερμότητας, Διπλωματική εργασία, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π., Αθήνα 2006
16. Α. Στέγγου-Σαγιά, Συσκευές και εγκαταστάσεις θερμικών διεργασιών, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2010
17. Δ. Κουρεμένος, Θερμοδυναμική Ι, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα 2003.
18. Ε. Ρογδάκης, Θερμοδυναμική ΙΙ, Αθήνα 1992.

## ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

19. ASHRAE Handbook «Fundamentals», American Society of Heating Refrigeration and Air-Conditioning Engineering, Atlanta, Georgia, Edition 2009.
20. ASHRAE Handbook «HVAC-Systems and Equipment», American Society of Heating Refrigeration and Air-Conditioning Engineering, Atlanta, Georgia, Edition 2008.
21. ASHRAE Green Guide (3rd edition). The Design, Construction, and Operation of Sustainable Buildings, American Society of Heating Refrigeration and Air-Conditioning Engineering, Atlanta, Georgia, Edition 2010.
22. ASHRAE Standard 55:2004, Thermal Environmental Conditions for Human Occupancy, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc, Atlanta, GA.
23. ASHRAE Standard 62.1:2007, Ventilation for Acceptable Indoor Air Quality, American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc, Atlanta, GA.

24. Hermann Recknagel, Eberhard Sprenger, Θέρμανση και Κλιματισμός (59η έκδοση), Αθήνα 1980
25. EVAPCO, LSTA Cooling Towers, 1996
26. W.F. Stoecker, Industrial Refrigeration Handbook, McGraw-Hill, 2004.
27. W.F. Stoecker, Refrigeration and Air-Conditioning, McGraw-Hill Publishing Company (2nd edition), March 1983.
28. Ibrahim Dincer, Refrigeration Systems and Applications, Wiley, 2003.
29. Keith Herold, Reinhard Radermacher, Sanford A. Klein, Absorption Chillers and Heat Pumps, CRC Press, 1996.
30. C.O. Bennett and J.E. Myers, Momentum, Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1962.
31. Y.A. Cengel, Introduction to Thermodynamics and Heat Transfer, McGraw-Hill Companies, International Edition, 1997.
32. A.P. Fraas, Heat Exchanger Design, 2nd edn, John Wiley and Sons, Inc. 1989.
33. A.F. Mills, Basic Heat and Mass Transfer, Richard D. Irwin, Inc. 1995.
34. S. Kakac and H. Liu, Heat Exchangers: Selection, Rating, and Thermal Design, 2nd edn, CRC Press, 2002.
35. F. Kreith and M.S. Bohn, Principles of heat transfer, 5th edn, West Publishing Company, 1993.
36. D. Poulidakos, Conduction Heat Transfer, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
37. M. J. Moran, H. N. Shapiro, Fundamentals of Engineering Thermodynamics, 5th Edition, WILEY, 2006.
38. C. Borgnakke, R. Sonntag, Fundamentals of Thermodynamics, 7th Edition, WILEY, 2009.

#### **ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΕΣ**

39. <http://users.ntua.gr/xenophon/>